

Topologia I, 2013Z. Egzamin. I termin 2014-02-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe, zakreślając kółkiem właściwą odpowiedź i skreślając pozostałe. Jeśli zmieniasz zdanie, napisz obok właściwą odpowiedź, skreślając wszystkie pozostałe. Punktacja: 1 poprawna odp, -0,5 błędna, 0 nie wiem

Pytanie 1. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ a zbiór $U \in \mathcal{T}$, to zbiór $A \setminus U$ jest domknięty w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 2. Jeśli przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$ przestrzeń $(A, \mathcal{T}|_A)$ też jest ośrodkowa.

☐ TAK ☒ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 3. Rozważmy podzbiór płaszczyzny euklidesowej $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ składający się z punktów o obu współrzędnych niewymiernych $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \notin \mathbb{Q}\}$. W przestrzeni $(A, \mathcal{T}_e|_A)$ istnieje nieprzeliczalna rodzina rozłącznych, niepustych podzbiorów otwartych.

☐ TAK ☒ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 4. Niech $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeżeli $A \times B$ jest domkniętym podzbiorem $X \times Y$, to $A \subset X$ i $B \subset Y$ są podzbiarami domkniętymi.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 5. Jeśli przestrzeń topologiczna zawiera spójny podzbiór gęsty to jest spójna.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 6. Jeśli $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest odwzorowaniem ciągłym, to dla dowolnego podzbioru zwartego $K \subset Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}(K)$ jest podzbiorem zwartym w $(X, \mathcal{T}_X)$.

☐ TAK ☒ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 7. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych z topologią dyskretną. Podzbiór

$$A := \{(n_1, n_2, \dots) \in \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Z} : \forall_i n_i < n_{i+1}\} \subset \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Z}$$

jest domknięty w topologii produktowej.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 8. Dowolna metryka wyznaczająca topologię euklidesową na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest zupełna.

☐ TAK ☒ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 9. Niech $A \subset X$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, dla której istnieje odwzorowanie ciągłe $r: X \rightarrow A$ takie, że $r(a) = a$ dla $a \in A$ (retrakcja). Jeśli odwzorowanie $r: X \rightarrow A$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym, to $(A, \mathcal{T}|_A)$ jest przestrzenią ściągającą.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Pytanie 10. Przekłuta sfera $S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$ jest homotopijnie równoważna z przekłutym torusem $S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$.

☐ TAK ☒ NIE ☐ NIE-WIEM

Topologia I, 2013Z. Egzamin. I termin, 2014-02-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe, zakreślając kółkiem właściwą odpowiedź i skreślając pozostałe. Jeśli zmieniasz zdanie, napisz obok właściwą odpowiedź, skreślając wszystkie pozostałe. Uzasadnij odpowiedzi.

Punktacja: 1 pkt. poprawna odp, -0,5 błędna, 0 nie wiem, uzasadnienie 0 - 4 pkt.

Pytanie 11. Niech $A \subset X$ będzie zwartym podzbiorem przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$. Wtedy przestrzeń ilorazowa X/A ma własność Hausdorffa.

☒ TAK ☐ NIE ☐ ~~NIE-WIEM~~

Uzasadnienie

Pytanie 12. Odwzorowania $\alpha_+, \alpha_-: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$ dane wzorami $\alpha_+(z) = z + 2$, $\alpha_-(z) = z - 2$ są homotopijne.

☐ ~~TAK~~ ☒ NIE ☐ ~~NIE-WIEM~~

Uzasadnienie

Pytanie 13. Dowolna metryka wyznaczająca topologię euklidesową na produkcie dwóch sfer euklidesowych $S^2 \times S^2$ jest zupełna.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Uzasadnienie

Pytanie 14. W przestrzeni funkcji ciągłych $C([0, 1])$ na odcinku euklidesowym o wartościach rzeczywistych z metryką d_{sup} kula domknięta $D(0; 1) := \{f \in C([0, 1]) \mid \|f\| \leq 1\}$ jest zwarta.

☐ TAK ☒ NIE ☐ NIE-WIEM

Uzasadnienie

Pytanie 15. Wstęga Möbiusa bez brzegu posiada podzbiór $S \subset M$ homeomorficzny z okręgiem, którego dopełnienie nie jest spójne.

☒ TAK ☐ NIE ☐ NIE-WIEM

Uzasadnienie (może być sugestywny rysunek)

Topologia I, 2013Z. Egzamin. I termin, 2014-02-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 1 (9 pkt). Niech $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wykaż, że:

- a) Odwzorowanie f jest domknięte (tzn. obrazy zbiorów domkniętych są domknięte) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $y \in Y$ oraz zbioru otwartego $U \supset f^{-1}(y)$ istnieje zbiór otwarty $V \ni y$ taki, że $f^{-1}(V) \subset U$.
- b) Załóżmy, że odwzorowanie f jest określone na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ i ma wartości w przestrzeni zwartej $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli jest ono domknięte oraz dla każdego punktu $y \in Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym, to $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią zwartą.

Topologia I, 2013Z. Egzamin. I termin, 2014-02-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 2 (8 pkt). Dla dowolnego podzbioru $A \subset S^1 \subset \mathbb{C}$ zdefiniujmy podzbiór płaszczyzny $X(A) := \bigcup_{z \in A} \{tz \mid t \in \mathbb{R}\}$.

- a) Scharakteryzuj zbiory A dla których zbiór $X(A)$ z metryką euklidesową jest zupełny.
- b) Wykaż, że jeśli zbiór A jest przeliczalny, to istnieje liczba zespolona $w \in S^1$ taka, że dla każdego $z \in A$ argument iloczynu $\arg(wz)$ jest liczbą niewymierną.

Topologia I, 2013Z. Egzamin. I termin, 2014-02-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 3 (9 pkt). Przedstaw torus T jako przestrzeń ilorazową kwadratu euklidesowego $J^2 := [-1, 1] \times [-1, 1]$ (wykonaj rysunek).

- a) Wykaż, że K jest przestrzenią zwartą i łukowo spójną.
- b) Wskaż na rysunku odcinki w kwadracie, których obrazy przy odwzorowaniu ilorazowym $q: J^2 \rightarrow K$ są homeomorficzne z okręgami S^1 .
- c) Skonstruuj retrakcję $r: K \rightarrow S$, gdzie $S \subset K$ jest podzbiorem homeomorficznym z okręgiem i wykaż, że odwzorowanie r nie jest ściągające (tzn. nie jest homotopijne ze stałym).