

Topologia I, Egzamin. II termin, 2013-03-05

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe, zakreślając właściwą odpowiedź i skreślając pozostałe. ¹

Zad. 1. Jeżeli przekształcenie $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ jest ciągłe, to to samo odwzorowanie jest ciągłe jeśli zamiast topologii strzałki na prostej, rozpatrujemy topologię euklidesową $\mathcal{T}_e$.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 2. Przestrzeń metryczna $(C([0, 1], d_{\text{sup}})$ funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych, określonych na odcinku $[0, 1]$ z metryką d_{sup} jest zupełna i całkowicie ograniczona.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 3. W dowolnej przestrzeni topologicznej suma dwóch zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 4. Zbiór punktów o obu współrzędnych niewymiernych na płaszczyźnie z topologią kolejową posiada bazę przeliczalną.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 5. Istnieje ciągłe odwzorowanie sfery $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ na odcinek domknięty $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 6. Przestrzeń $\mathbb{R}/A$ powstająca przez utożsamienie do punktu trzeylementowego podzbioru $A := \{0, 1, 2\}$ jest ściągalna.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 7. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych z topologią dyskretną. Podzbiór

$$A := \{(n_1, n_2, \dots) \in \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Z} : \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} x_n = 0\}$$

jest gęsty w produkcie kartezjańskim przeliczalnej rodziny przestrzeni $\mathbb{Z}$.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 8. Ograniczony i domknięty podzbiór płaszczyzny z metryką rzeczną jest zwarty.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 9. Produkt kartezjański dwóch przestrzeni ściągalnych jest przestrzenią ściągalną.

TAK NIE NIE WIEM

Zad. 10. Przekłuta płaszczyzna rzutowa jest homeomorficzna z przekłutym torusem.

TAK NIE NIE WIEM

¹Punktacja: 1 poprawna odp, -0,5 błędna, 0 nie wiem

Topologia I, Egzamin. II termin, 2013-03-05

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe i uzasadnij odpowiedź (zakreśl właściwą i skreśl pozostałe): *Punktacja: 1 pkt. poprawna odp, -0,5 błędna, 0 nie wiem, uzasadnienie 0 - 4 pkt.*

Zad. 11. Prosta z topologią strzałki $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Zad. 12. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią zwartą, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją, to f jest odwzorowaniem ilorazowym.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Zad. 13. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje ciągłe odwzorowanie zbioru Cantora $C \subset [0, 1]$ na podprzestrzeń $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}$.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Zad. 14. Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niepuste podzbiory $A \subset X$ i $B \subset Y$ są łukowo spójne wtedy i tylko wtedy gdy $A \times B$ jest łukowo spójnym podzbiorem $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Zad. 15. Odwzorowania $f_0, f_1: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ dane wzorami $f_0(z) = z^2$ oraz $f_1(z) = z^2 + 5$ są homotopijne.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Topologia I, Egzamin. II termin, 2013-03-05

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 16.

1. Niech $X := S^1 \times [-1, 1]$ będzie walcem. Wykazać, że przestrzeń ilorazowa

$$Y := (S^1 \times [0, 1]) / (S^1 \times \{0, 1\})$$

jest zwarta. Czy jest ona homeomorficzna ze sferą S^2 ?

2. Niech $X := S^1 \times (-1, 1)$ będzie walcem bez brzegu. W zbiorze $X^+ := X \cup \infty$ zdefiniujemy rodzinę zbiorów $\mathcal{B}$ składającą się ze zbiorów należących do topologii X oraz zbiorów $X^+ \supset U \ni \infty$ zawierających punkt ∞ takich, że $X^+ \setminus U \subset X$ jest podzbiorem zwartym. Wykaż, że:

- (a) rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą topologii przez nią generowanej $\mathcal{T}(\mathcal{B})$,
- (b) X^+ jest homeomorficzna z przestrzenią Y .

Topologia I, Egzamin. II termin, 2013-03-05

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 17. Wykaż, że w sferze przekłutej w dwóch punktach $S^2 \setminus \{p_1, p_2\}$:

- a) dopełnienie dowolnego podzbioru przeliczalnego jest zbiorem spójnym;
- b) dopełnienie sumy przeliczalnej rodziny zbiorów, z których każdy jest homeomorficzny z odcinkiem domkniętym, jest niepuste.

Topologia I, Egzamin. II termin, 2013-03-05

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 18. Niech $(C(I), \mathcal{T}_{\text{sup}})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na odcinku $I = [0, 1]$ wyposażoną w topologię generowaną przez metrykę d_{sup} . Wykaż, że:

- a) Przestrzeń $(C(I), \mathcal{T}_{\text{sup}})$ jest ściągalna;
- b) Dowolny spójny otwarty podzbiór w $C(I)$ jest łukowo spójny;
- c) Dla każdego $n > 0$ istnieje ciągła surjecta $(C(I), \mathcal{T}_{\text{sup}}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$.