

Topologia, Seria 5:

Zadanie 1. Rozważmy zbiór

$$X = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)} (0, 1) \times \{q\},$$

z metryką rzeki d_r .

- a) Czy przestrzeń (X, d_r) jest zupełna?
- b) Czy przestrzeń (X, d_r) jest metryzowalna w sposób zupełny?

Zadanie 2. Rozważmy zbiór

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, 1) \times \left\{ \frac{1}{n} \right\},$$

z metryką rzeki d_r .

- a) Czy przestrzeń (Y, d_r) jest zupełna?
- b) Czy przestrzeń (Y, d_r) jest metryzowalna w sposób zupełny?

Zadanie 3. Rozważmy przestrzeń zwartą X i ciąg $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji ciągłych $f_n : X \rightarrow [0, \infty)$. Załóżmy, że ciąg jest nierosnący czyli:

$$\forall_{x \in X} f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq 0.$$

Ponadto załóżmy, że jest punktowo zbieżny do zera czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{x \in X} \exists_{N_x \in \mathbb{N}} \forall_{k > N_x} f_k(x) < \varepsilon.$$

Udowodnić, że ciąg zbiega jednostajnie do zera czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{x \in X} \forall_{k > N} f_k(x) < \varepsilon.$$

Wskazówka: Ustalić $\varepsilon > 0$ i skonstruować pokrycie przestrzeni X .

Zadanie 4. Rozważmy sferę 3-wymiarową

$$S^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid d_{eu}(v, 0) = 1\}$$

Niech $A : S^3 \rightarrow S^3$ będzie dane przez $A(v) = -v$. Niech $T : S^3 \rightarrow S^3$ będzie przekształceniem bez punktów stałych, czyli

$$\forall_{x \in S^3} T(x) \neq x.$$

Uzasadnij, że przekształcenia T i A są homotopijne.