

Topologia, Seria 2:

Topologia lewych przedziałów na liczbach rzeczywistych $\mathcal{T}_l \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ jest zadana przez

$$\mathcal{T}_l = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Zadanie 1. Rozważmy liczby rzeczywiste z topologią lewych przedziałów. Sprawdzić czy funkcja $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ jest ciągła gdy

a) $f(x) = x^2$,

b) $f(x) = x^3$.

Zadanie 2. Rozważmy liczby rzeczywiste z topologią lewych przedziałów.

a) Znaleźć domknięcie podzbioru $\{0\}$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$.

b) Uzasadnić, że podzbiór $\{-e^n | n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$.

Zadanie 3 (kolkwium 2014). Niech

$$K = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\}) \subset \mathbb{R}^2$$

będzie brzegiem kwadratu na płaszczyźnie. Oznaczmy odpowiednio przez K_e, K_r, K_k, K_s ten podzbiór z topologią

- euklidesową,
- wyznaczoną przez metrykę „rzeka”,
- wyznaczoną przez metrykę „kolejową”
- podprzestrzeni płaszczyzny z topologią o bazie $[a, b) \times [c, d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

Zbadać własności tych przestrzeni, wypełniając poniższą tabelę – należy postawić w odpowiedniej rubryce T, jeśli zbiór ma daną własność, lub N, jeśli jej nie ma, odpowiedzi uzasadnić. Nie trzeba wypełniać zaciemnionego kwadratu.

Własność	K_e	K_r	K_k	K_s
Ośrodkowa				
Posiada przeliczalną bazę				
Posiada punkty izolowane				

Zadanie 4. Udowodnić lub wskazać kontrprzykład na następujące twierdzenie: Jeżeli w przestrzeni topologicznej X każdy podzbiór jest otwarty lub jest domknięty, to przestrzeń ta jest dyskretna.