

GAL II, Seria 1

Zadanie 1. Rozważmy macierz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Niech $I \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ oznacza macierz identyczności.

- a) Załóżmy, że dla każdej macierzy $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$. Wykazać, że $A = \lambda \cdot I$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.
- b) Załóżmy, że dla każdej macierzy odwracalnej $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$. Wykazać, że $A = \lambda \cdot I$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: Rozważyć macierze z tylko jedną niezerową komórką

Zadanie 2 (K 15). Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 - 3x_2, 6x_1 + 8x_2, 6x_1 + 3x_2 + 5x_3).$$

- a) Znaleźć wartości własne i wymiary przestrzeni własnych.
- b) Stwierdzić czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny.
- c) Jeśli jest diagonalizowalny to znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych.