

1. ENDOMORFIZMY

Szukamy bazy w której endomorfizm jest ładny.

Zadanie 1.1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dany wzorem

$$\varphi(x, y) = (5x - 2y, 4x - y).$$

Znaleźć macierz w bazie standardowej i bazie $((1, 1), (1, 2))$

Zadanie 1.2. Wypisać macierz zmiany bazy w poprzednim zadaniu.

Cel: 1) Czy $A \sim B$, 2) Ładna macierz podobna do A .

Macierze diagonalne i diagonalizowalne

Zadanie 1.3. $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Zadanie 1.4. $A \sim B \Rightarrow \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$

Zadanie 1.5. Macierze

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

Nie są diagonalizowalne w $M_2(\mathbb{R})$. W $M_2(\mathbb{C})$ zapisać je w bazie $((1, i), (1, -i))$

$\mathbb{C}$ jest lepsze niż $\mathbb{R}$, algebraiczna domkniętość.

Zadanie 1.6. Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (1) Nie jest podobna do identyczności.
- (2) Nie jest diagonalizowalna.

Zadanie 1.7. Wyznacz $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{5000}$

Zadanie 1.8. Fibonacci. Rozważmy $\varphi(x, y) = (x + y, x)$.

- (1) Wykaż, że $\varphi^n(1, 0) = (F_{n+1}, F_n)$
- (2) Doceń możliwość diagonalizacji.

Zadanie 1.9. Nie $\varphi : V \rightarrow W$. Wykaż, że istnieją takie bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, że $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ jest standardowej postaci.

Zadanie 1.10 (PD). Rozważmy macierz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- a) Załóżmy, że dla każdej macierzy $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$. Wykazać, że $A = \lambda \cdot I$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.
- b) Załóżmy, że dla każdej macierzy odwracalnej $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$. Wykazać, że $A = \lambda \cdot I$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. WARTOŚCI WŁASNE

Zadanie 2.1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dany wzorem

$$\varphi(a, b, c) = (5a - 4c, 8a - b - 12c, 2a - c).$$

Czy 3 jest wartością własną tego endomorfizmu. Jeśli tak to znaleźć wektor własny. **(2,1,1)**

$$A \sim B \Rightarrow \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(B)$$

Zadanie 2.2. Rozważmy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć wymiar przestrzeni własnej V_2 . Znaleźć wszystkie wartości własne.

przestrzenie własne sumują się prosto, więc $\sum_\lambda \dim V_\lambda \leq \dim V$.

Równość wtw gdy przekształcenie diagonalizowalne.

Zadanie 2.3. Niech $\varphi : V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. Wykazać

$$V_3 \cap V_5 = \{0\}.$$

Jak znajdować λ :

$$v \in V_\lambda \iff Av = \lambda \cdot v \iff (A - \lambda \cdot I)v = 0 \iff v \in \ker(A - \lambda \cdot I).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot I)$$

Wielomian charakterystyczny $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$

Zadanie 2.4. Rozważmy macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pokaż, że

$$w_A(t) = t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A).$$

$$A \sim B \Rightarrow w_A = w_B$$

Zadanie 2.5. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dany wzorem

$$\varphi(x, y) = (2x - y, 2y - x).$$

Czy φ jest diagonalizowalny? Znaleźć wartości własne, wymiary przestrzeni własnych i bazę z wektorów własnych.

Zadanie 2.6. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dany wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (5x - 2y - z, 3y - z, y + z).$$

Stwierdzić czy jest diagonalizowalna?

Zadanie 2.7. Wyznaczyć wartości i przestrzenie własne dla rzutu i symetrii.

Zadanie 2.8. Rozważmy przekształcenie $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dane przez $\varphi(A) = 2A + A^T$. Wyznacz wartości i przestrzenie własne.

Zadanie 2.9 (PD, K16). Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 - 3x_2, 6x_1 + 8x_2, 6x_1 + 3x_2 + 5x_3).$$

- Znaleźć wartości własne i wymiary przestrzeni własnych.
- Stwierdzić czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny.
- Jeśli jest to znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych.

2.1. Test.

Zadanie 2.10 (K). Załóżmy, że $\varphi : V \rightarrow V$ jest diagonalizowalny. Wykazać, że

$$V = \operatorname{im} \varphi \oplus \ker \varphi.$$

Czy implikacja w drugą stronę zachodzi.

Zadanie 2.11 (K). Załóżmy, że $\varphi : V \rightarrow V$, gdzie $\dim \operatorname{im} \varphi = k$. Czy jest możliwe aby φ miał $k + 1$ różnych wartości własnych? Co z $k + 2$?

Zadanie 2.12. Załóżmy, że $\varphi : V \rightarrow V$ nie jest monomorfizmem i $\dim V = 7$, $\dim V_6 = 6$. Czy φ musi być diagonalizowalny?

Zadanie 2.13. Niech $\varphi : V \rightarrow V$. Załóżmy, że 1, 4, 7 są wartościami własnymi, oraz $\dim V = 5$, $\dim V_4 = 4$. Czy to możliwe?

Zadanie 2.14 (K). $A \in M_5(\mathbb{R})$. Czy może być $r(A - 2I) = r(A + 2I) = 2$?

Zadanie 2.15 (K). Macierz $M_n(\mathbb{R})$ jest rzędu 1 i posiada niezerową wartość własną. Czy A musi być diagonalizowalna?

Zadanie 2.16 (K). Niech $\varphi : V \rightarrow V$. Czy $v, w, v - w$ mogą być niezerowymi wektorami własnymi dla trzech różnych wartości własnych?

Zadanie 2.17 (PD). Macierz $A \in M_6(\mathbb{R})$ spełnia:

$$\operatorname{rk}(A - I) = 5, \quad \operatorname{rk}(A - 2I) = 4, \quad \operatorname{rk}(A - 3I) = 3.$$

Uzasadnij, że A jest macierzą izomorfizmu.

Zadanie 2.18. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ spełnia $A^m = I_n$. Uzasadnij, że jej wartości własne to pierwiastki z jedynki.

2.2. Trudniejsze.

Zadanie 2.19. Niech $f, g : V \rightarrow V$. Załóżmy, że $f \circ g = g \circ f$. Niech V_λ będzie przestrzenią własną g . Wykazać, że

$$f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Zadanie 2.20 (K 15). Załóżmy, że W jest przestrzenią niezmienniczą dla f , a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są wektorami własnymi dla f odpowiadającymi różnym wartościom własnym. Załóżmy, że jeśli

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k \in W.$$

Wykazać $\forall \alpha_i \in W$.

Zadanie 2.21 (K 24). Endomorfizmy f, g przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$ spełniają warunek

$$f \circ g = g \circ f \circ f.$$

- Wykaż, że jeśli $v \notin \ker g$ jest wektorem własnym endomorfizmu f o wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$, to λ^2 jest wartością własną f .
- Wykaż, że jeśli $\ker f \neq \{0\}$, to endomorfizm g ma wektor własny należący do $\ker f$.
- Wykaż, że zachodzi alternatywa: endomorfizm f ma wartość własną $\lambda \in \mathbb{C}$ taką, że $|\lambda| = 1$, lub endomorfizmy f oraz g mają wspólny wektor własny.

Zadanie 2.22 (K 25). Rozważmy $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, oraz macierz $A = x \cdot y^T$. Załóżmy, że $t = \sum x_i y_i \neq 0$.

- uzasadnić, że t jest wartością własną A .
- Wykazać, że A jest diagonalizowalna.
- Niech $B \in M_n(\mathbb{C})$ będzie diagonalizowalna i rzędu 1. Pokazać, że

$$\det(B + I_n) = \operatorname{Tr}(B) + 1.$$

2.3. Powtórzenie.

Zadanie 2.23 (PD). Niech $s \in \mathbb{R}$ oraz $A_s \in M_3(\mathbb{R})$.

$$A_s = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru s macierz A_s jest diagonalizowalna.

Zadanie 2.24 (K 23). Niech $s \in \mathbb{R}$ oraz $A_s \in M_4(\mathbb{R})$.

$$A_s = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ s & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -s & s \end{bmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru s macierz A_s jest diagonalizowalna. Wyznaczyć A_3^{100} .

Zadanie 2.25 (K 22). Niech $t \in \mathbb{C}$ oraz $A_s \in M_3(\mathbb{C})$.

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru t macierz A_t jest diagonalizowalna. Wyznaczyć A_1^{100} .

Zadanie 2.26 (K 17). Niech $t \in \mathbb{R}$ oraz $A_t, B \in M_4(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 4 & -t & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & -t & 0 \end{bmatrix}$$

Czy macierz A jest diagonalizowalna. Dla jakich wartości t macierze A i B_t są podobne.

Zadanie 2.27 (K 14). Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$$

jest diagonalizowalny?

Zadanie 2.28 (K 25). Niech $s \in \mathbb{R}$ oraz $A_s \in M_4(\mathbb{R})$.

$$A_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy istnieje $s \in \mathbb{R}$ takie, że macierz A_s jest diagonalizowalna.