

GAL seria 3 - pisemna

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadania należy oddać pisemnie na ćwiczeniach: środa 12.XI.2025.

Zadanie 1. Rozważmy przestrzeń liniową nad ciałem liczb zespolonych

$$V = \text{lin}((i, 1, -i, -1), (i, -i, 1, -1), (1, 0, 0, -1)) \subseteq \mathbb{C}^4$$

a) Rozstrzygnij czy każdy wektor $(x, y, z, t) \in V$ jest rozwiązaniem równania

$$x + y + z + t = 0.$$

b) Rozstrzygnij czy każdy wektor $(x, y, z, t) \in V$ spełnia równość $t = -1$.

Zadanie 2. Rozważmy wektory $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (2, 3, 4), \alpha_3 = (3, 6, 7) \in \mathbb{R}^3$, oraz wektor $\beta_a = (a, 9, 4) \in \mathbb{R}^3$ zależny od parametru $a \in \mathbb{R}$.

a) Rozstrzygnij czy układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny?

b) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $\beta_a \in \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$?

Zadanie 3. Rozważmy zbiór

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \cdot \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

Narysuj zbiór A . Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ liczba $(1 + i \cdot \sqrt{3})^n$ należy do A .

Zadanie 4. Liczby $1, 3+i, i-1, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ są pierwiastkami wielomianu o współczynnikach rzeczywistych. Jaki jest najmniejszy możliwy stopień tego wielomianu.