Rozwiązanie

Dla danego (niekoniecznie deterministycznego) automatu $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, I, F, \Delta)$ skonstruujemy deterministyczny $\mathcal{A}'$ działający dla tego samego alfabetu gdzie:

- $Q' = \mathcal{P}(Q \times Q)$;
- $I' = \{Id\}$ (tj. $\{(q, q) \mid q \in Q\}$);
- $F' = \{R \mid \exists_{p \in I, q \in F}.(p, q) \in R \circ R\}$;
- $\delta'(R, a) = \{(p, q) \mid \exists_s.\ pRs \wedge s \xrightarrow{a} q\}$
  (tj. $R \circ R_a$ dla $R_a = \{(p, q) \mid p \xrightarrow{a} q\}$)

W powyższym, złożenie relacji R i S to $R \circ S = \{(p, q) \mid \exists_s.pRs \wedge sSq\}$.

Wczytując słowo wejściowe zachowujemy niezmiennik, że po wczytaniu prefiksu v jesteśmy w stanie R_v takim że $pR_vq \iff$ ze stanu p da się po słowie v dojść do q. Po wczytaniu całego słowa w kończymy w relacji R_w. Z definicji, $ww \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \iff$ istnieją stany: początkowy p, końcowy q i dowolny s że $p \xrightarrow{w} s$ oraz $s \xrightarrow{w} q$. Dzięki niezmiennikowi, ostatni warunek jest równoważny $(p, q) \in R_w \circ R_w$.
W efekcie, $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \{w \mid ww \in \mathcal{L}(\mathcal{A})\} = \sqrt{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$, tak jak chcieliśmy.

Zauważmy, że gdyby w automacie $\mathcal{A}'$ zamiast stanów końcowych F' wziąć $F'' = \{R \mid \exists_{p \in I, q \in F.\ pRq}\}$, to otrzymalibyśmy automat deterministyczny równoważny $\mathcal{A}$.