Zadania na wtorkowe ćwiczenia

Wersja 2.

Zadanie 1
Pokaż, że dla grupy algebraicznej G nad $\mathbb{C}$ składowe spójności i składowe nieprzywiedlne pokrywają się.

Zadanie 2
Pokaż, że jeśli $H \subset G$ jest lokalnie domkniętą podgrupą algebraiczną grupy algebraicznej G, to H jest *domkniętą* podgrupą G. Wywnioskuj, że jeśli H jest otwarta i G jest spójna, to $H = G$. (*Uwaga: $H \subset G$ jest podgrupą algebraiczną, to znaczy m.in. że inkluzja $H \to G$ jest morfizmem rozmaitości*)

Zadanie 3
Rozważmy podgrupy

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\} \qquad \text{oraz} \qquad G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$$

w grupie GL_2. Czy są one izomorficzne jako grupy algebraiczne? Czy są one izomorficzne jako rozmaitości (po zapomnieniu struktury grupy)?

Zadanie 4
Niech $G = \mathbb{C}^*$. Grupa ta działa na sobie przez lewostronne mnożenie. Pokaż, że $\mathbb{C}(G)$, czyli ciało funkcji wymiernych na G, *nie* jest wymiernym G-modułem.

Zadanie 5$\star$, dla osób po teorii grup Liego
Niech $G \subset \mathrm{GL}_n$ będzie grupą zawartą w grupie macierzy ściśle górnie-trójkątnych (=górnotrójkątnych z jedynkami na przekątnej). Pokaż, że odwzorowania exp i log zadają izomorfizm G jako rozmaitości z przestrzenią afiniczną $\mathbb{C}^{\dim G}$.