Zadania na czwartkowe ćwiczenia

Wersja 1.

Zadanie 1
Udowodnij, że
$$\mathrm{Hom}_{gr.alg.}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}.$$

Zadanie 2
Niech V i W będą skończenie wymiarowymi reprezentacjami torusa jednowymiarowego $\mathbb{C}^*$. Działanie na V i W indukuje działanie $\mathbb{C}^*$ na przestrzeniach liniowych V^* i $V \otimes W$. Niech
$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i, \qquad W = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i, \qquad V^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (V^*)_i, \qquad (V \otimes W) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (V \otimes W)_i.$$
będą rozkładami na przestrzenie własne torusa. Uzasadnij, że: $\dim (V^*)_i = \dim V_{-i}$, oraz
$$\dim (V \otimes W)_i = \dim \left(\bigoplus_{j+k=i} V_j \otimes W_k \right).$$

Zadanie 3
Rozważmy działanie torusa $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{P}^2$ dane przez
$$t \cdot [x_0 : x_1 : x_2] = [x_0, tx_1, t^2 x_2].$$
Niech $\mathbf{e}_2$ oznacza punkt $[0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^2$. Rozważmy indukowane działanie $\mathbb{C}^*$ na rozdmuchaniu $Bl_{\mathbf{e}_2}\mathbb{P}^2$. Opisz punkty stałe i rozkład BB (na plus komórki) dla tego działania.

Zadanie 4
Pokaż, że grupa addytywna $(\mathbb{C}, +)$ nie jest liniowo reduktywna.

Zadanie 5
Niech $B_n \subset \mathrm{GL}_n$ będzie podgrupą złożoną z macierzy górnie trójkątnych. Pokaż, że GL_n / B_n jest rozmaitością rzutową. Nazywamy ją *rozmaitością (pełnych) flag.*

Zadanie 6
To zadanie ma na celu pokazanie, że jeśli G jest afiniczna, to podgrupa $[G, G] \subset G$ domknięta. Dla $n \in \mathbb{Z}_+$ niech $G^{2n} \to G$ będzie odwzorowaniem regularnym zadanym przez
$$(g_1, g_2, \ldots, g_{2n-1}, g_{2n}) \to [g_1, g_2] \cdot [g_3, g_4] \cdot \ldots \cdot [g_{2n-1}, g_{2n}].$$
i niech V_n będzie domknięciem jego obrazu. Zatem $[G, G] = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{im}(G^{2n})$ jako zbiory.

1. Pokaż, że V_n jest nieprzywiedlny. Pokaż, że $V_{n-1} \subset V_n$ i wywnioskuj, że $V_{n-1} = V_n$ dla $n \gg 0$.
2. Niech n będzie takie, że $V_n = V_{n+1} = \ldots$ i niech U będzie otwartym zbiorem w V_n zawartym w obrazie G^{2n}. Pokaż, że dla każdego $z \in V_n$ zbiory zU oraz U przecinają się, zatem $z \in U \cdot U^{-1} \subset \mathrm{im}\, G^{4n}$.
3. Wywnioskuj tezę.