Teoria liczb
równania Diofantyczne, 4-8 maja

Zadanie 1. Niech $d > 1$ będzie bezkwadratową dodatnią liczbą całkowitą taką, że $d \not\equiv 3 \pmod 4$. Celem tego zadania jest rozwiązanie równania $y^2 = x^3 - d$ przy pewnych dodatkowych założeniach.

(a) Załóżmy, że $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ jest rozwiązaniem. Pokaż, że x jest liczbą nieparzystą i względnie pierwszą z d.

(b) Pokaż, że $y - \sqrt{-d}$ oraz $y + \sqrt{-d}$ nie mają nietrywialnych wspólnych dzielników w $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$.

(c) Załóżmy, że $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Z równania $x^3 = y^2 + d$ wywnioskuj, że $y + \sqrt{-d} = \pm(a + b\sqrt{-d})^3$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$. Oblicz, że $b = \pm 1$, $d = 3a^2 \pm 1$ oraz $x = a^2 + d$, $y = -8a^3 \pm 3a$.

(d) Powtórz rozumowanie z poprzedniego podpunktu, zakładając jedynie, że grupa klas $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ jest skończona i ma rząd niepodzielny przez 3.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $y^2 = x^3 - 4$ w liczbach całkowitych, imitując argument powyżej.