Teoria liczb
elementy całkowite, 24-27 kwietnia

Zadanie 1. Niech $K \subseteq \mathbb{C}$ będzie ciałem i niech $d = \dim_{\mathbb{Q}} K$.

(a) Niech $\alpha \in K$ i niech e będzie stopniem jego wielomianu minimalnego. Uzasadnij, że e dzieli d. W szczególności zachodzi $e \leq d$.

(b) Jaki stopień może mieć wielomian minimalny liczby postaci $\sqrt{n} + \sqrt{m}$, gdzie $n, m \in \mathbb{Z}$?

Zadanie 2. Niech $n_1, \ldots, n_k$ będą liczbami całkowitymi takimi, że dla $i \neq j$ liczba $n_i n_j$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. Celem tego zadania jest pokazanie, że $\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$.

(a) Jaki jest minimalny wielomian $\sqrt{n_i n_j}$ dla $i \neq j$?

(b) Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k})$. Pokaż, że $\mathrm{Tr}(\sqrt{n_i n_j}) = 0$ dla każdych $i \neq j$, gdzie ślad jest liczony w K.

(c) Niech $d = \dim_{\mathbb{Q}} K$. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^{k} q_i \sqrt{n_i} = 0$ dla pewnych $q_i \in \mathbb{Q}$. Weźmy $j \in \{1, \ldots, k\}$. Oblicz, że

$$dq_j n_j = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{n_j} \sum_{i=1}^{k} q_i \sqrt{n_i}\right) = 0$$

i wywnioskuj, że $q_j = 0$. Zatem $\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_k}$ są liniowo niezależne.

(d) Niech $p_1, \ldots, p_r$ będą parami różnymi liczbami pierwszymi i niech $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r})$. Pokaż, że $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2^r$. *Wskazówka: wypisz bazę złożoną z pierwiastków.*

Zadanie 3. Niech $K \subseteq \mathbb{C}$ będzie ciałem takim, że $\dim_{\mathbb{Q}} K = d$ jest skończony. Elementowi α przypisujemy *normę* $N(\alpha)$ tego elementu jako wyznacznik macierzy $M(\alpha) \in \mathbb{M}_{d \times d}(\mathbb{Q})$, która definiuje mnożenie przez α w K; jest to definicja analogiczna do definicji śladu z wykładu.

(a) Pokaż, że $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$ dla każdych $\alpha, \beta \in K$.

(b) Pokaż, że jeśli $\alpha \in \mathcal{O}_K$ to $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(c) Pokaż, że jeśli $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, gdzie $d > 1$ jest liczbą bezkwadratową, to $N(\alpha) = |\alpha|^2$ dla każdego $\alpha \in K$.

(d) Pokaż, że jeśli $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie $d > 1$ jest liczbą bezkwadratową, to może się zdarzyć, że $N(\alpha) < 0$.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ będą ciałami i niech $\alpha \in K$. Porównaj ślad oraz normę α traktowanego jako element K oraz jako element L.

Zadanie 5. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą.

(a) Niech $\alpha \in \mathbb{Z}[\omega_p]$, gdzie ω_p jest pierwiastkiem p-tego stopnia z jedynki. Uzasadnij, że stopień wielomianu minimalnego α dzieli liczbę $p - 1$.

(b) ($\star$, dla osób po Algebrze II) Załóżmy, że α jest stopnia dwa. Pokaż, że α jest $\mathbb{Q}$-liniową kombinacją 1 oraz $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$. *Wskazówka: zadanie 4 serii 5 (tej z 3-13 kwietnia).*