# Teoria liczb
## funkcje zeta, 20-23 marca

W tym tygodniu zadania są trudniejsze niż poprzednio: jak wspominałem na wykładzie, nie jest prosto znaleźć łatwe zadania z analitycznej teorii liczb. Zakładam, że zapewne ostatecznie rozłożą się na dwa tygodnie i jestem skłonny dawać dużo więcej wskazówek. Jest to częściowo test; jeśli większość z Państwa będzie miała duże trudności, w przyszłości zadania będą „spokojniejsze": mniej interesujące, ale łatwiejsze. Powodzenia!

**Zadanie 1.** Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą i niech liczby całkowite $a, b$ będą takie, że

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}.$$

Pokaż, że

(a) liczba $a$ jest podzielna przez $p$,

(b) liczba $a$ jest podzielna przez $p^2$.

**Zadanie 2.** Niech $\zeta^*(s) = \sum_{n\geq 1, 2\nmid n} n^{-s}$ dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

(a) Oblicz granicę $\lim_{s\to 1^+} \frac{\ln \zeta^*(s)}{-\ln(s-1)}$.

(b) Określamy funkcję $R(s)$ dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ poprzez

$$\ln \zeta^*(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}, p\neq 2} p^{-s} + R(s)$$

Pokaż, że $R(s)$ jest ograniczona przy $s \to 1^+$.

*Wskazówka: imituj dowody dla $\zeta(s)$ z wykładu lub wykorzystaj udowodnione tam zależności pomiędzy $\zeta$ i $\zeta^*$.*

**Zadanie 3.** Niech $L(s, \chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) n^{-s}$, gdzie $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ oraz

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \equiv 0, 2 \pmod 4 \\ 1 & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{gdy } n \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

(a) Pokaż, że $1 - \frac{1}{3} < L(s, \chi) < 1$.

(b) Pokaż, że $L(s, \chi) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$.

(c) Określamy funkcję $R'(s)$ dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ poprzez

$$\ln L(s, \chi) = \sum_{p\in\mathbb{P}, p\neq 2} \chi(p) p^{-s} + R'(s)$$

Pokaż, że $R'(s)$ jest ograniczona przy $s \to 1^+$.

**Zadanie 4.** (a) Pokaż, że $\lim_{s\to 1^+} \frac{\ln \zeta^*(s) \pm \ln L(s,\chi)}{-\ln(s-1)} = 1$.

(b) Pokaż, że gęstość Dirichleta zbioru liczb pierwszych $p$ takich, że $p \equiv 1 \pmod 4$ to $1/2$. Pokaż to samo dla $p \equiv 3 \pmod 4$. Zatem oba zbiory są nieskończone.