Teoria liczb

grupy klas, 12-15 czerwca

W poniższych zadaniach obliczeniowo użyteczne będzie lepsze oszacowanie stałej λ, która pojawiła się na ostatnim wykładzie. Mianowicie niech $\mathbb{Q} \subseteq K$ będzie skończonym rozszerzeniem ciał, gdzie $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$, i niech t będzie połową liczby różnych zanurzeń $K \subseteq \mathbb{C}$ takich, że $K \not\subseteq \mathbb{R}$ (przykładowo $t = 1$ dla $K = \mathbb{Q}(i)$, bo K ma dwa zanurzenia. Podobnie, $t = 0$ dla $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, bo oba zanurzenia K mają obraz w $\mathbb{R}$). Niech

$$\lambda_K = \frac{n!}{n^n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^t \sqrt{|\operatorname{disc}(\mathcal{O}_K)|}.$$

Wtedy zachodzi następujące twierdzenie: każdy niezerowy element grupy klas $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ jest postaci $[I]$, gdzie $I \subseteq \mathcal{O}_K$ jest ideałem takim, że $|\mathcal{O}_K/I| \leq \lambda_K$. W szczególności, zachodzi $|\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\cap I)| \leq \lambda_K$. Stałą λ_K nazywa się czasem *ograniczeniem Minkowskiego dla K*. Stała ta jest z reguły mniejsza niż stała λ z wykładu.
Stałą λ_K można obliczyć online na stronie https://sagecell.sagemath.org/, wpisując zapytanie podobne do

```
QQ[sqrt(-19)].minkowski_bound().n()
```

Zadanie 1. Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, gdzie $d \neq 0, 1$ jest całkowita i bezkwadratowa. Niech $A = \mathcal{O}_K$ będzie pierścieniem liczb całkowitych w K.

(a) Oblicz $\operatorname{disc}(\mathcal{O}_K)$ w zależności od reszty $d \mod 4$.

(b) Oblicz, że $\lambda_K < 2$ dla $-d = 2, 3, 5$ i wywnioskuj, że $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ są dziedzinami z jednoznacznością rozkładu.

(c) Wywnioskuj to samo dla $\mathbb{Z}[i]$ oraz $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$. Co dzieje się dla $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?

(d) Pokaż, że $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-19})}$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu. *To zamyka zadanie I z serii 11-15 maja.*

Zadanie 2. Załóżmy, że dla pewnego ciała K zachodzi $\lambda_K \leq 2$. Niech $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$. Pokaż, że grupa klas ciała K ma co najwyżej $2^n - 1$ elementów.

Zadanie 3. Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-31})$ i niech $A = \mathcal{O}_K$.

(a) Oblicz stałą Minkowskiego dla K.

(b) Pokaż, że ideał $3A$ jest maksymalny. *Wskazówka: rozważ iloraz lub oblicz bezpośrednio, że każdy element spoza ideału jest odwracalny modulo ideał.*

(c) Pokaż, że $2A = \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$, gdzie $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$ są różnymi ideałami maksymalnymi. Pokaż, że nie są one główne.

(d) Wywnioskuj z oszacowania Minkowskiego, że grupa klas A ma trzy elementy.

Zadanie 4. $\star$ Niech $\mathbb{Q} \subseteq K$ będzie skończonym rozszerzeniem.

(a) Niech I będzie niezerowym ideałem w $\mathcal{O}_K$. Pokaż, że istnieje m takie, że I^m jest główny, załóżmy, że $I^m = \alpha\mathcal{O}_K$.

(b) Niech $L = K(\sqrt[m]{\alpha})$. Pokaż, że ideał $I\mathcal{O}_L$ jest główny.

(c) Pokaż, że istnieje skończone rozszerzenie $K \subseteq L$ takie, że dla każdego niezerowego ideału $I \subseteq \mathcal{O}_K$ ideał $I\mathcal{O}_L$ jest główny.