Algebra Przemienna
IX seria zadań (na środę 16.12)

Zadanie 1
Niech $x'_1, \ldots, x'_{n-1}, f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ będą elementami takimi, że $\Bbbk[x'_1, \ldots, x'_{n-1}, f] \hookrightarrow \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ jest całkowitym homomorfizmem. Pokaż, że elementy $x'_1, \ldots, x'_{n-1}, f$ są algebraicznie niezależne tzn. nie istnieje niezerowy wielomian $P \in \Bbbk[t_1, \ldots, t_n]$ taki, że $P(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, f) = 0$. *Wskazówka: przeanalizuj wymiary Krulla.*

Zadanie 2
Pokaż, że każdy ideał pierwszy $\mathfrak{p}$ w $\Bbbk[x_1, x_2]$ jest albo maksymalny albo zerowy albo generowany przez jeden wielomian nierozkładalny. *Wskazówka: ideał generowany przez niezerowy wielomian nierozkładalny jest pierwszy. Jeśli teza jest fałszywa, skonstruuj łańcuch w $\Bbbk[x_1, x_2]$ długości trzy.*

Zadanie 3
Niech $A = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy + z^2, x^2y - xy^3 + z^4 - 1)$. Znajdź d i algebraicznie niezależne elementy $f_1, \ldots, f_d \in A$ takie, że $\mathbb{C}[f_1, \ldots f_d] \subset A$ jest skończony.

Zadanie 4 HIPERPOWIERZCHNIE W $\Bbbk^n$

(a) Niech $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ będzie niestałym wielomianem. Pokaż, że $\dim \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(f) = n - 1$. *Wskazówka: użyj triku Nagaty by sprowadzić wszystko do sytuacji, gdy f jest unormowany względem x_n. Pokaż, że $\Bbbk[x_1, \ldots, x_{n-1}] \to \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(f)$ jest całkowitym rozszerzeniem.*

(b) Niech $\mathfrak{p} \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ będzie ideałem pierwszym takim, że $\dim(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}) = n - 1$. Pokaż, że $\mathfrak{p}$ jest generowany przez jeden element. *Wskazówka: weź nierozkładalny element $f \in \mathfrak{p}$, skorzystaj z (a).*

(c) Niech $n = 2$ i niech f_1, f_2 będą niestałymi wielomianami. Podaj wszystkie możliwe wartości $\dim(\Bbbk[x_1, x_2]/(f_1, f_2))$. Każdy przykład spróbuj zilustrować rysunkiem w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 5
Niech $I := (xz - y^2, x^3 - yz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

(a) Oblicz $\dim(\mathbb{C}[x, y, z]/I)$,

(b) Znajdź r i ideały pierwsze $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ takie, że $V(I) = \bigcup_{j=1}^{r} V(\mathfrak{p}_j)$.
Wskazówka: zgadnij je.

Zadanie 6 ZADANIE DODATKOWE
Niech $i\colon \Bbbk[t^2, t^3] \to \Bbbk[t]$ będzie naturalnym włożeniem.

(a) Pokaż, że $\Bbbk[t^2, t^3] \simeq \Bbbk[x, y]/(x^3 - y^2)$.

(b) Pokaż, że i jest homomorfizmem normalizacji $\Bbbk[t^2, t^3]$.

(c) Pokaż, że $i^*\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[t]) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[t^2, t^3])$ jest bijekcją.

(d) Dla każdego punktu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\Bbbk[t^2, t^3])$ opisz włókno $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\Bbbk[t^2, t^3]} \Bbbk[t]$.

(e) Pokaż, że jeśli $j\colon A \to B$ jest skończonym homomorfizmem zredukowanych pierścieni noetherowskich takim, że dla każdego punktu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(B)$ homomorfizm $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ jest izomorfizmem, to j jest izomorfizmem.

(f) Dlaczego punkty (c) i (e) nie przeczą sobie?