Algebra Przemienna
VIII seria zadań (na środę 9.12)

Niech A będzie dziedziną z ciałem ułamków K. Mówimy, że A jest *normalna* jeśli A jest równa swojemu całkowitemu domknięciu w K.

Zadanie 1

(a) Niech $Z \subset \mathbb{C}^n$ będzie podzbiorem Zariskiego-domkniętym. Pokaż, że dla pewnego r istnieją wielomiany $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ takie, że $Z = V(f_1, \ldots, f_r)$.

(b) Niech $Z \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem Zariskiego-domkniętym, czyli innymi słowy obcięciem do $\mathbb{R}^n$ pewnego zbioru $Z \subset \mathbb{C}^n$ powyżej. Pokaż, że istnieje wielomian $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ taki, że $Z = V(f)$.

Zadanie 2
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem i $a, b \in \Bbbk$. Niech $A = \Bbbk[x, y]/(y^2 - x^3 - ax - b)$. Pokaż, że homomorfizm $\Bbbk[x] \to A$ jest skończony i injektywny i wywnioskuj, że A jest jednowymiarową algebrą. *Algebrę A nazywamy (częścią afiniczną) krzywej eliptycznej.*

Zadanie 3
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem, a $\overline{\Bbbk}$ jego algebraicznym domknięciem.

(a) Pokaż, że $\Bbbk \to \overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} \overline{\Bbbk}$ jest całkowitym homomorfizmem pierścieni.

(b) Pokaż, że każdy ideał pierwszy w $\overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} \overline{\Bbbk}$ jest maksymalny.

(c) Pokaż, że dla każdego ideału maksymalnego $\mathfrak{m} \subset \overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} \overline{\Bbbk}$ oba włożenia $i_1, i_2 \colon \overline{\Bbbk} \to (\overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} \overline{\Bbbk})/\mathfrak{m}$ zadane przez $i_1(\alpha) = \overline{\alpha \otimes 1}$, $i_2(\alpha) = \overline{1 \otimes \alpha}$ są izomorfizmami.

(d) [Zadanie dodatkowe] Pokaż, że funkcja

$$\operatorname{Spec}(\overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} \overline{\Bbbk}) \to \operatorname{Aut}_{\Bbbk-\text{algebr}}\left(\overline{\Bbbk}\right)$$

zadana przez $\mathfrak{m} \mapsto i_1^{-1} \circ i_2$ jest bijekcją. Wywnioskuj, że jeśli powyższa grupa automorfizmów jest nieskończona, to pierścień $\overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} \overline{\Bbbk}$ nie jest Noetherowski ani Artinowski. *Uwaga: tak jest np. dla $\Bbbk = \mathbb{Q}$.*

Zadanie 4 2 PKT
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem. Pokaż, że

(a) jeśli mamy podpierścienie $A \subset B \subset \Bbbk$ takie, że $A \subset B$ jest całkowitym homomorfizmem, to całkowite domknięcia pierścieni A i B w $\Bbbk$ są równe.

(b) dziedzina $\Bbbk[t]$ jest normalna (definicja normalności — patrz nagłówek),

(c) całkowite domknięcie $A = \Bbbk[x, y]/(y^2 - x^3)$ w swoim ciele ułamków jest izomorficzne z $\Bbbk[t]$,

(d) całkowite domknięcie $A = \Bbbk[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$ w swoim ciele ułamków jest izomorficzne z $\Bbbk[t]$.

Wskazówka: w podpunktach (c), (d) znajdź najpierw element t w ciele ułamków A, który to element jest całkowity nad A. Pokaż, że $\Bbbk[t]$ zawiera całkowite domknięcie A i wywnioskuj, że jest równe.

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem, niech $A = \Bbbk \times \Bbbk \times \ldots \times \Bbbk = \prod_{i=1}^{n} \Bbbk$ i niech $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$. Niech $r = |\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}|$.

(a) Pokaż, że pod-$\Bbbk$-algebra A generowana przez x jest $\Bbbk$-przestrzenią liniową rozpinaną przez $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)_{i \geqslant 0}$.

(b) Pokaż, że $\Bbbk[x] \simeq \prod_{i=1}^{r} \Bbbk$. *Wskazówka: redukcja do $r = n$ i wyznacznik Vandermonde.*

Zadanie 6 Zadanie dodatkowe, teoria Galois algebraicznie
Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem ciał i załóżmy, że L jest d-wymiarową przestrzenią liniową nad K.

(a) Pokaż, że $|\operatorname{Spec}(L \otimes_K L)| \leqslant d$. Powiemy, że $K \subset L$ jest *rozszerzeniem Galois*, jeśli zachodzi równość. Poniżej zakładamy, że $K \subset L$ jest rozszerzeniem Galois. *Wskazówka: VI.3(b).*

(b) Pokaż, że $L \otimes_K L \simeq L \times \ldots \times L$ jako L-algebry. *Wskazówka: VI.3.*

(c) Niech $x \in L$ i niech $f \in K[x]$ będzie jego wielomianem minimalnym. Pokaż, że wielomian f w ciele L rozkłada się na czynniki liniowe i nie ma pierwiastków wielokrotnych. *Poprzednie zadanie dla $L[1 \otimes x]$.*