Algebra Przemienna
VII seria zadań (na środę 2.12)

Poniżej wszystkie określenia „domknięte” i „otwarte” odnoszą się do topologii Zariskiego.

Zadanie 1

(a) Czy niepuste przecięcie nieprzywiedlnych domkniętych podzbiorów $Z_1, Z_2 \subset \mathbb{C}^n$ jest zawsze nieprzywiedlne?

(b) Czy istnieją dwa różne nieprzywiedlne zbiory domknięte $Z_1, Z_2 \subset \mathbb{C}^n$ których przecięcia z $\mathbb{R}^n$ są równe?

Zadanie 2
Niech $A \to B$, $B \to C$ będą homomorfizmami pierścieni.

(a) Pokaż, że jeśli $A \to B$ i $B \to C$ są skończone, to $A \to C$ jest skończony.

(b) Pokaż, że jeśli $A \to B$ i $B \to C$ są całkowite, to $A \to C$ jest całkowity. *Wskazówka: ostatni wniosek z ostatniego wykładu.*

Zadanie 3
Niech $f\colon A \to B$ będzie skończonym homomorfizmem pierścieni. Pokaż, że włókna $f^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ są skończone. *Wskazówka: zadania VI.5, VI.6.* Czy może się zdarzyć, że pewne włókno jest puste? Czy może się zdarzyć, że pewne dwa włókna mają różną liczbę punktów?

Zadanie 4
Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem. Niech $Z_1 \subset \Bbbk^n$, $Z_2 \subset \Bbbk^m$ będą zbiorami domkniętymi, zaś $I(Z_1) \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ oraz $I(Z_2) \subset \Bbbk[y_1, \ldots, y_m]$ odpowiadającymi im ideałami.

(a) Pokaż, że
$$\frac{\Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]}{(I(Z_1)) + (I(Z_2))} \simeq \frac{\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]}{I(Z_1)} \otimes_{\Bbbk} \frac{\Bbbk[y_1, \ldots, y_m]}{I(Z_2)}.$$

(b) Pokaże, że obraz w $\Bbbk^{n+m}$ spektrum maksymalnego powyższej algebry jest równy $Z_1 \times Z_2$; w szczególności $Z_1 \times Z_2$ jest domknięty.
Wskazówka: zadanie V.4(c).

(c) Pokaż, że $I(Z_1 \times Z_2) = \sqrt{(I(Z_1)) + (I(Z_2))}$.
Tutaj $\sqrt{X} = \{f \in A \mid \exists_m f^m \in X\}$ oznacza radykał ideału X. Z pewną dozą pracy można pokazać, że $\sqrt{-}$ nie jest konieczny, ale to wymaga zbyt wiele, by rozwiązać to na tym marginesie.

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe, Artinowskie to Noetherowskie wymiaru zero
Niech A będzie pierścieniem Artinowskim i niech $\operatorname{Nil}(A)$ będzie radykałem zera w A, czyli ideałem złożonym z elementów nilpotentnych. Niech $\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$, patrz zadanie V.4(c).

(a) Pokaż, że istnieje n takie, że $(\operatorname{Nil}(A))^n = (\operatorname{Nil}(A))^{2n}$.

(b) Pokaż, że dla n powyżej mamy $(\operatorname{Nil}(A))^n = 0$.
Wskazówka: Weź najmniejszy element I rodziny ideałów takich, że $I \cdot \operatorname{Nil}(A)^n \neq 0$. Pokaż, że $I = (x)$ i że $I \cdot \operatorname{Nil}(A)^n = I$. Wywnioskuj, że $x = xy$ dla $y \in \operatorname{Nil}(A)^n$.

(c) Pokaż, że $\mathfrak{m}_1^n \cdot \mathfrak{m}_2^n \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_r^n = 0$. Wywnioskuj, że istnieje skończony ciąg ideałów
$$A = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_N = 0,$$
taki, że dla każdego i istnieje liczba $s(i)$ taka, że $M_i/M_{i+1} \simeq A/\mathfrak{m}_{s(i)}$ jako A-moduły.

(d) Wywnioskuj przez indukcję, że A jest Noetherowskim A-modułem, zatem A jest Noetherowski.

(e) Pokaż w drugą stronę, że jeśli A jest pierścieniem Noetherowskim takim, że każdy ideał pierwszy jest maksymalny, to A jest Artinowski.