Algebra Przemienna
VI seria zadań (na środę 25.11)

Moduł M nad pierścieniem A nazywamy *Artinowskim*, jeżeli każdy ciąg $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ podmodułów M stabilizuje się. Pierścień A nazywamy *Artinowskim*, jeżeli A jest Artinowskim A-modułem. Zadanie dodatkowe nie było omówione na poprzednich ćwiczeniach, więc przenosi się na bieżącą serię, można je zgłosić ponownie.

Zadanie 1
Niech M będzie A-modułem i $f\colon M \to M$ będzie surjektywnym homomorfizmem A-modułów.

(a) Załóżmy, że M jest Noetherowski. Pokaż, że f jest izomorfizmem. *Wskazówka: ciąg* $(\ker f^n)_n$.

(b) Dla $A = \mathbb{C}[x]$ wskaż przykład M oraz f takich, że $\ker f \neq 0$. *Wskazówka: hotel Hilberta.*

Zadanie 2
Niech $I, J \lhd \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, przy czym $I \neq 0$. Pokaż, że jeśli $IJ = I$, to $J = (1)$. W szczególności, w $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ nie ma niezerowych właściwych ideałów I takich, że $I^2 = I$. *Wskazówka: trik z zadania IV.2, przejdź do lokalizacji.*

Zadanie 3
Niech A będzie pierścieniem, a $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r \in \operatorname{Spec}(A)$ będą parami różnymi ideałami maksymalnymi dla pewnego $r \geqslant 2$.

(a) Pokaż, że $\mathfrak{m}_1 + (\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_r) = (1)$.

(b) Pokaż, że naturalne odwzorowanie „diagonalne” $A \to \prod_{i=1}^r A/\mathfrak{m}_i$ jest surjektywne. *Wskazówka: poprzedni podpunkt pokazuje, że w obrazie mamy element postaci* $(\lambda, 0, \ldots, 0)$ *gdzie* $\lambda \neq 0$.

Zadanie 4 2 PKT
Niech A będzie pierścieniem Artinowskim.

(a) Załóżmy, że A jest dziedziną. Pokaż, że A jest ciałem. *Wskazówka: rozważ* $x \in A$ *i ciąg* (x^n).

(b) Pokaż, że każdy ideał pierwszy w A jest maksymalny.

(c) Wykaż, że $\operatorname{Spec}(A)$ jest zbiorem skończonym. Wywnioskuj, że jest to dyskretna przestrzeń topologiczna.

Wskazówka: rozważ ciąg $\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supset \ldots$.

(d) Podaj przykład pierścienia Noetherowskiego, który nie jest Artinowski. *Uwaga: w przyszłości pokażemy, że każdy pierścień Artinowski jest Noetherowski.*

Zadanie 5
Pokaż, że jeśli $\Bbbk$ jest ciałem i A jest $\Bbbk$-algebrą, która jest skończenie wymiarowa jako przestrzeń wektorowa nad $\Bbbk$, to A jest pierścieniem Artinowskim. Pokaż, że $|\operatorname{Spec}(A)| \leqslant \dim_{\Bbbk} A$.

Zadanie 6 ZADANIE DODATKOWE, WŁÓKNO
Niech $f\colon A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $\kappa(-)$ oznacza ciało rezidualne, patrz zadanie IV.1.

(a) Niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ oraz $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$. Pokaż, że $f^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$ taki, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\text{kan.}"] & \kappa(\mathfrak{q}) \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\text{kan.}"] & \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(b) Niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Pokaż, że $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \to \operatorname{Spec}(B)$ jest injektywne i obrazem tego przekształcenia jest $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p})$. *Wskazówka: zadanie 2(a) oraz, dla injektywności, definicja* $\kappa(-)$ *w IV.1 oraz izomorfizmy* $S^{-1}A \otimes_A B \simeq S^{-1}B$ *jak i* $A/I \otimes_A B \simeq B/IB$.

Algebrę $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ nazywamy *włóknem* f nad $\mathfrak{p}$.