Algebra Przemienna
V seria zadań (na środę 18.11)

Jeśli A jest $\Bbbk$-algebrą, to przez $\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$ oznaczamy zbiór tych ideałów maksymalnych $\mathfrak{m}$, dla których naturalne odwzorowanie $\Bbbk \to A/\mathfrak{m}$ jest izomorfizmem. Rozważamy go z topologią podprzestrzeni i nazywamy *zbiorem punktów $\Bbbk$-wymiernych* lub, w skrócie, *zbiorem punktów wymiernych.*
Rozważmy zbiory X, Y, S z odwzorowaniami $\pi_X \colon X \to S, \pi_Y \colon Y \to S$. Definiujemy *produkt włóknisty X i Y nad S*:

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x) = \pi_Y(y)\}.$$

Jeśli S jest jednoelementowy to $X \times_S Y = X \times Y$.

Zadanie 1
Wskaż przykład pierścienia A, A-modułów M, N oraz elementu $s \in M \otimes_A N$ takich, że nie istnieją elementy $m, n \in M$ takie, że $s = m \otimes n$. *Wskazówka: moduły wolne.*

Zadanie 2

(a) Ile elementów ma $\mathrm{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$?

(b) Niech $A \to B, A \to C$ będą homomorfizmami pierścieni, zaś D będzie pierścieniem. Pokaż, że zachodzi bijekcja

$$\mathrm{Hom}(B \otimes_A C, D) \simeq \mathrm{Hom}(B, D) \times_{\mathrm{Hom}(A,D)} \mathrm{Hom}(C, D)$$

gdzie Hom oznacza homomorfizmy pierścieni (po prawej stronie jest produkt włóknisty).

(c) Niech $A = \Bbbk$ będzie ciałem, $B = \Bbbk[x]$, $C = \Bbbk[y]$, $D = \Bbbk(t)$. Określamy odwzorowania $\Bbbk$-algebr $B \to D$, $C \to D$ które posyłają x na t oraz y na t^{-1}, odpowiednio. Indukują one, na mocy poprzedniego podpunktu, odwzorowanie $\Bbbk[x, y] \to \Bbbk(t)$. Który ideał pierwszy jest obrazem $\mathrm{Spec}(\Bbbk(t)) \to \mathrm{Spec}(\Bbbk[x, y])$? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli poślemy y na t?

Uwaga: $\Bbbk(t)$ jest ciałem funkcji wymiernych jednej zmiennej lub, inaczej, ciałem ułamków $\Bbbk[t]$.

Zadanie 3
Niech $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ będzie pierścieniem liczb Gaussa.

(a) Pokaż, że pierścienie $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p)$, gdzie $p = 2, 3, 5$ są odpowiednio: niezredukowany, ciałem, produktem dwóch ciał.

(b) Czy $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}[i]} \mathbb{Z}[i]$ jest dziedziną?

(c) Czy $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i]$ jest dziedziną?

Zadanie 4
Niech A, B, C będą $\Bbbk$-algebrami i $A \to B, A \to C$ będą homomorfizmami $\Bbbk$-algebr. Niech $D = B \otimes_A C$. Kanoniczne homomorfizmy indukują odwzorowanie ciągłe $F \colon \mathrm{Spec}(D) \to \mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C)$.

(a) Pokaż, że F nie jest injektywne dla $A = \Bbbk$, $B = \Bbbk[x]$, $C = \Bbbk[y]$.

(b) Niech $i_A \colon \Bbbk \to A$ będzie kanonicznym homomorfizmem. Pokaż, że $\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(A)$ jest w bijekcji ze zbiorem homomorfizmów pierścieni $\{\varepsilon \colon A \to \Bbbk \mid \varepsilon \circ i_A = \mathrm{id}\}$.

(c) Pokaż, że odwzorowanie $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ na spektrach obcina się do odwzorowania $\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(B) \to \mathrm{Spec}_{\Bbbk}(A)$. Pokaż, że F obcina się do

$$F_0 \colon \mathrm{Spec}_{\Bbbk}(D) \to \mathrm{Spec}_{\Bbbk}(B) \times_{\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(A)} \mathrm{Spec}_{\Bbbk}(C).$$

(d) Pokaż, że F_0 jest bijekcją. Pokaż, że F_0 nie jest homeomorfizmem. *Wskazówka: 2(b).*

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe, włókno
Niech $f \colon A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $\kappa(-)$ oznacza ciało rezidualne, patrz zadanie IV.1.

(a) Niech $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ oraz $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$. Pokaż, że $f^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$ taki, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\text{kan.}"] & \kappa(\mathfrak{q}) \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\text{kan.}"] & \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(b) Niech $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Pokaż, że $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \to \mathrm{Spec}(B)$ jest injektywne i obrazem tego przekształcenia jest $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p})$. *Wskazówka: zadanie 2(a) oraz, dla injektywności, definicja $\kappa(-)$ w IV.1.*

Algebrę $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ nazywamy *włóknem f* nad $\mathfrak{p}$.