Algebra Przemienna
IV seria zadań (na środę wydziałową 12.11)

Jak zwykle, we wszystkich zadaniach A jest pierścieniem. W tej serii w zadaniach o tensorze szczególnie prawdziwa jest zasada „jak nie wiesz co robić, to z definicji".

Zadanie 1 CIAŁO REZIDUALNE
Niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Pokazaliśmy na poprzednich ćwiczeniach, że $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subset A_{\mathfrak{p}}$ jest ideałem maksymalnym.

(a) Pokaż, że ciało $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ jest izomorficzne, jako A-algebra, z ciałem ułamków dziedziny $A/\mathfrak{p}$. To ciało nazywamy *ciałem rezidualnym* w punkcie $\mathfrak{p}$ i oznaczamy $\kappa(\mathfrak{p})$.

(b) Uzasadnij, że dla każdego $f \in A$ obraz f w $\kappa(\mathfrak{p})$ jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{p} \in V(f)$.

(c) Opisz ciała rezidualne dla wszystkich punktów $\operatorname{Spec}(A)$ gdy $A = \mathbb{C}[x]$.

Zadanie 2

(a) Niech I będzie skończenie generowanym ideałem w pierścieniu lokalnym $(A, \mathfrak{m})$. Pokaż, że jeśli $I = I^2$ to $I = A$ lub $I = 0$. *Wskazówka: lemat Nakayamy.*

(b) Niech A będzie pierścieniem funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ i niech $\mathfrak{m} \subset A$ będzie ideałem maksymalnym złożonym z funkcji f takich, że $f(0) = 0$. Pokaż, że $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ i wywnioskuj, że $\mathfrak{m}$ nie jest skończenie generowany. *Wskazówka: przejdź do $A_{\mathfrak{m}}$.*

Zadanie 3

(a) Niech M będzie A-modułem. Pokaż, że $M \otimes_A (A/I) \simeq M/IM$.

(b) Niech $m, n \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy n i m są względnie pierwsze.

Zadanie 4 KLOCKI DO LICZENIA TENSORA I, 2PKT
Niech M, N, P będą A-modułami. Pokaż, że zachodzą następujące izomorfizmy A-modułów:

(a) $M \otimes_A A \simeq M$ przez mnożenie,

(b) $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$,

(c) $(M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$.
Wskazówka: obie strony reprezentują odwzorowania trójliniowe z $M \times N \times P$.

Zadanie 5 KLOCKI DO LICZENIA TENSORA II

(a) Niech M oraz $\{N_i\}_{i \in I}$ będą A-modułami. Pokaż, że $M \otimes_A (\bigoplus_{i \in I} N_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$ jako A-moduły.

(b) Niech $\Bbbk$ będzie ciałem, zaś M i N będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad $\Bbbk$. Oblicz wymiar przestrzeni $M \otimes_{\Bbbk} N$.

Zadanie 6 ZADANIE DODATKOWE, WŁÓKNO
Niech $f\colon A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni i niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Pokaż, że $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \to \operatorname{Spec}(B)$ jest injektywne i obrazem tego przekształcenia jest $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p})$. Algebrę $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ nazywamy *włóknem* f nad $\mathfrak{p}$. *Wskazówka: dość podobna jest własność uniwersalna lokalizacji.*

Zadanie 7 ZADANIE DODATKOWE
Niech $\mathfrak{m} = (x, y) \subset \mathbb{C}[x, y] =: A$.

(a) Pokaż, że istnieje odwzorowanie $j\colon \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to A \otimes_A A \simeq A$ które posyła $m_1 \otimes_A m_2$ na $m_1 m_2$ dla każdych $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$.

(b) Pokaż, że $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_A \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ jest 4-wymiarową przestrzenią wektorową.

(c) Pokaż, że odwzorowanie j nie jest injektywne.

(d) Wskaż **błąd** w niniejszym rozumowaniu: „Rozważmy $x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$. Wtedy

$$x \otimes y - y \otimes x = x \otimes (y \cdot 1) - y \otimes (x \cdot 1) = (xy) \otimes 1 - (yx) \otimes 1 = (xy - yx) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0.$$

Wobec tego $0 = x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$."