Algebra Przemienna
III seria zadań (na środę 4.11)

Jak zwykle, we wszystkich zadaniach A jest pierścieniem.

Zadanie 1

(a) Niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Czy $A_{\mathfrak{p}}$ jest pierścieniem lokalnym (dla każdych A, $\mathfrak{p}$)?

(b) Niech $f \in A$. Czy A_f jest pierścieniem lokalnym (dla każdych A, f)?

Zadanie 2
Niech $x, y \in A$ będą elementami takimi, że $xy = 0$ oraz $(x, y) = (1)$. Udowodnij, że $A_x \simeq A/y$. Znajdź wszystkie możliwe lokalizacje pierścienia $\mathbb{Z}/10$.

Zadanie 3
Załóżmy, że dla każdego $x \in A$ istnieje liczba $n(x) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ taka, że $x^{n(x)} = x$. Niech $S \subset A$ będzie multiplikatywnie domknięty. Pokaż, że kanoniczny homomorfizm $i\colon A \to S^{-1}A$ jest surjektywny. *Wskazówka: rozważ $A/\ker(i)$ i wspomnij jeden z lematów z wykładu.*

Zadanie 4 2 PKT
Niech $S, T \subset A$ będą zbiorami multiplikatywnie domkniętymi. Wtedy $ST := \{s \cdot t \mid s \in S, t \in T\}$ także jest multiplikatywnie domknięty. Niech $i\colon A \to S^{-1}A$, $j\colon A \to T^{-1}A$ będą kanonicznymi homomorfizmami. Pokaż, że A-algebry $(i(T))^{-1}(S^{-1}A)$, $(ST)^{-1}A$, $(j(S))^{-1}(T^{-1}A)$ są izomorficzne.
Wskazówka 1: nie trzeba tu nic liczyć. Wskazówka 2: własność uniwersalna lokalizacji daje jedyne odwzorowania. Wskazówka 3: nie sądzę, by dowód „obliczmy z definicji przez ułamki" dał się pokazać w mniej niż 10 tablic ;)

Zadanie 5 2 PKT
Niech $S \subset A$ będzie multiplikatywnie domknięty. Definiujemy *nasycenie* S jako

$$\overline{S} = \{t \in A \mid \exists a \in A : ta \in S\}.$$

(a) Pokaż, że $\overline{S}$ jest równy zbiorowi złożonemu z takich elementów $a \in A$, że $a/1 \in S^{-1}A$ jest odwracalny.

(b) Pokaż, że A-algebry $S^{-1}A$ i $\overline{S}^{-1}A$ są izomorficzne.

(c) [Zadanie dodatkowe] Niech $U := \operatorname{im}(\operatorname{Spec}(S^{-1}A) \to \operatorname{Spec}(A))$. Pokaż, że $\overline{S} = A \setminus \bigcup\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in U\}$.
Wskazówka: jeśli $a \notin \overline{S}$ to popatrz na $\operatorname{im}(\operatorname{Spec}(S^{-1}A) \to \operatorname{Spec}(A)) \cap V(a)$.

Morał: lokalizacja jest wyznaczona, z dokładnością do izomorfizmu, przez zbiór swoich ideałów pierwszych.

Zadanie 6 ZADANIE DODATKOWE
Niech $S \subset A$ będzie multiplikatywnie domknięty. Pokaż, że topologia Zariskiego na $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ jest równa topologii podprzestrzeni na $\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \subset \operatorname{Spec}(A)$. Wywnioskuj, że $\operatorname{Spec}(A_f) \simeq (\operatorname{Spec}(A))_f$ jako przestrzenie topologiczne.