Algebra Przemienna
II seria zadań (na środę 28.10)

We wszystkich zadaniach A jest pierścieniem, zaś $\mathrm{Spec}(A)$ rozważamy z topologią Zariskiego. Można i czasem bardzo warto powoływać się w rozwiązaniach na zadania z serii poprzedniej. Zadania dodatkowe są w zasięgu wszystkich z Państwa, ale dałem aż dwa w szczególności by zająć tych, którzy już widzieli podobne rzeczy na Alg I*.

Zadanie 1 Ideały maksymalne związane z ewaluacją
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem, niech $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów i niech $\mathfrak{m} \subset S$ będzie ideałem maksymalnym takim, że indukowany homomorfizm $\Bbbk \to S/\mathfrak{m}$ jest izomorfizmem. Pokaż, że istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Bbbk$ takie, że $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$. Pokaż, że $\mathfrak{m}$ jest jądrem homomorfizmu $S \twoheadrightarrow \Bbbk$ zadanego przez $f \mapsto f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
W tym zadaniu nie wolno powoływać się na sformułowane na wykładzie twierdzenie Hilberta o zerach.

Zadanie 2
Dla każdego $f \in A$ definiujemy $\mathrm{Spec}(A)_f := \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Pokaż, że rodzina $\{\mathrm{Spec}(A)_f \mid f \in A\}$ tworzy bazę topologii Zariskiego na $\mathrm{Spec}(A)$.

Zadanie 3 2 pkt
Niech $f\colon A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Opisz odwzorowanie $f^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ dla

(a) $A = \mathbb{C}[x]$ i $B = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$.

(b) $A = \mathbb{C}[x]$ i $B = \mathbb{C}[x]/x(x-1)(x-2)$.

(c) $A = \mathbb{R}[x]$ i $B = \mathbb{C}[x]$.

We wszystkich podpunktach f jest „oczekiwanym" homomorfizmem, tzn. $f(x) = x$ oraz w dwóch pierwszych podpunktach f jest $\mathbb{C}$-liniowy, a w ostatnim $\mathbb{R}$-liniowy. *Uwaga: w tym zadaniu utożsamiamy* $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ *z* $\mathbb{C} \sqcup \{\eta\}$*, gdzie* η *jest ideałem zerowym.*

Zadanie 4
Przestrzeń topologiczna X jest *quasi-zwarta* jeśli z każdego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone. *Uwaga: nie żądamy, by przestrzeń* X *była Hausdorffa.*

(a) Pokaż, że $\mathrm{Spec}(A)$ jest quasi-zwartą przestrzenią.
Wskazówka: wystarczy rozważać pokrycia postaci $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_i \mathrm{Spec}(A)_{f_i}$*. Czym jest wtedy* $V(\sum Af_i)$*?*

(b) Wskaż przykład pokrycia $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ za pomocą 2020 zbiorów otwartych takiego, że żadne 2019 z tych podzbiorów nie pokrywa $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$.

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe, 3 pkt
Niech A będzie pierścieniem. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) $\mathrm{Spec}(A)$ jest niespójną przestrzenią,

(b) istnieje element $0, 1 \neq e \in A$ taki, że $e^2 = e$ (taki element nazywamy nietrywialnym *idempotentem*),

(c) mamy izomorfizm $A \simeq A/I \times A/J$ dla pewnych ideałów właściwych $I, J \subset A$.

Zadanie 6 Zadanie dodatkowe, 3 pkt, tw. Hilberta o zerach dla ciał nieprzeliczalnych
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym nieprzeliczalnej mocy i niech $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Niech $\mathfrak{m} \subset S$ będzie ideałem maksymalnym. Celem zadania jest pokazanie, że $\Bbbk \to S/\mathfrak{m}$ jest izomorfizmem (zatem $\mathfrak{m}$ jest jak w zadaniu 1).

(a) Ustalmy i. Załóżmy, że nie istnieje element $\lambda \in \Bbbk$ taki, że $x_i - \lambda \in \mathfrak{m}$. Pokaż, że elementy

$$\left\{ \frac{1}{x_i - \lambda} \;\middle|\; \lambda \in \Bbbk \right\}$$

ciała $S/\mathfrak{m}$ są liniowo zależne nad $\Bbbk$. *Wskazówka: nieprzeliczalność.*

(b) W sytuacji z poprzedniego podpunktu wywnioskuj, że $x_i \in S/\mathfrak{m}$ jest elementem algebraicznym nad $\Bbbk \subset S/\mathfrak{m}$. Pokaż, że daje to sprzeczność i wywnioskuj stąd tezę zadania.

Zatem, przy założeniach zadania, można utożsamiać $\mathrm{Spec}_{\max}(S)$ *z* $\Bbbk^n$*.*