Algebra Przemienna
XIII i ostatnia seria zadań (na wtorek 26.01)

W większości tych zadań warto znać kombinatoryczną mądrość przodków: $\frac{1}{1-T} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i$ oraz ogólniej $\frac{1}{(1-T)^{n+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{n} T^i$, obie równości są równościami szeregów formalnych, nie mówimy nic o zbieżności.

Zadanie 1 2 PKT
Niech $S = \Bbbk[x, y]$ i $I = (x^3 - y^2)$.

(a) Czy I jest jednorodny w standardowej gradacji (tzn. $\deg(x) = \deg(y) = 1$)?

(b) Pokaż, że I jest jednorodny w gradacji zadanej przez $\deg(x) = 2$, $\deg(y) = 3$. Wywnioskuj, że $A = S/I$ jest zgradowanym pierścieniem.

(c) Szereg Poincaré pierścienia S w postaci ilorazu wielomianu przez $(1 - T^2)(1 - T^3)$.

(d) Oblicz szereg Poincaré pierścienia A i zapisz go w postaci ilorazu wielomianu przez $(1-T^2)(1-T^3)$. *Wskazówka: albo bezpośrednio albo ciąg dokładny* $0 \to S(-6) \to S \to S/I \to 0$.

Zadanie 2 LEMAT NAKAYAMY DLA ZGRADOWANYCH
Niech A będzie pierścieniem $\mathbb{N}$-zgradowanym, $A_+ := \bigoplus_{i \geqslant 1} A_i$ będzie ideałem, zaś M będzie modułem $\mathbb{Z}$-zgradowanym nad A takim, że dla dostatecznie małych $n < 0$ mamy $M_n = 0$.

(a) Pokaż, że jeśli $A_+M = M$, to $M = 0$.

(b) Pokaż, że jeśli $N \subset M$ jest A-podmodułem zgradowanym takim, że $M = N + A_+M$, to $M = N$.

Ważna uwaga: NIE ma tu założenia, że M jest skończenie generowany!

Zadanie 3 2 PKT
Niech $S = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów zgradowanym tak, że $\deg(x_i) = 1$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niech M będzie skończenie generowanym S-modułem. Niech $P_M = \frac{W}{(1-T)^{n+1}}$ będzie jego szeregiem Poincaré. Niech $W = \sum_{i=0}^{d} a_i T^i$, gdzie $a_i \in \mathbb{Q}$.

(a) Pokaż, że dla wszystkich $k \geqslant d$ mamy $\dim_{\Bbbk} M_k = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{n+k-i}{n}$. Wywnioskuj, że istnieje wielomian $h_M \in \mathbb{Q}[t]$ taki, że dla $k \geqslant d$ mamy $h_M(k) = \dim_{\Bbbk} M_k$. Wielomian ten nazywamy *wielomianem Hilberta modułu M*.

(b) Znajdź stopień wielomianu Hilberta dla $M = S$ oraz dla $M = S/(x_0^2)$. *Wskazówka: bezpośrednio lub jak w 1(d).*

(c) Czy $h_M(k) = \dim_{\Bbbk} M_k$ dla wszystkich $k \geqslant 0$ i każdego M?

Zadanie 4 ZADANIE DODATKOWE, $\mathbb{N}$-ZGRADOWANIE I REGULARNOŚĆ ORAZ PRZYKŁAD NIEZGRADOWANEJ
Niech A będzie $\mathbb{N}$-zgradowanym pierścieniem z $A_0 = \Bbbk$ ciałem, czyli A jest $\Bbbk$-algebrą.

(a) Załóżmy, że $A_+/(A_+)^2$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową i niech $a_1, \ldots, a_r \in A_+$ będą jednorodnymi elementami, których obrazy tworzą jej bazę. Pokaż, że $A = \Bbbk[a_1, \ldots, a_r]$. *Wskazówka: lemat Nakayamy powyżej lub jak na wykładzie.*

(b) Wywnioskuj z poprzedniego podpunktu, że $\dim A \leqslant r$.

(c) Wywnioskuj, że jeśli ideał $A_+ \in \operatorname{Spec}_{\max}(A)$ jest regularny, to $\dim A = r$ oraz A jest pierścieniem wielomianów w r zmiennych. *Wskazówka: wymiar A i generowanie przez r elementów.*

(d) Załóżmy, że charakterystyka ciała $\Bbbk$ jest różna od 2. Wywnioskuj, że nie istnieje $\mathbb{N}$-gradacja na $A = \Bbbk[x, y]/(y^2 - x^3 - x)$ taka, że $A_0 = \Bbbk$. *Wskazówka: A jest regularna (poprzednie serie), ale nie jest izomorficzna z $\Bbbk[t]$, bo ideał $(x, y)A$ nie jest główny (poprzednie serie).*