Algebra Przemienna
XII seria zadań (na wtorek 19.01)

Wiele z zadań opiera się na zadaniu XI.1.

Zadanie 1
Niech d będzie niezerową bezkwadratową liczbą całkowitą dodatnią. Niech $A = \mathcal{O}_K$ dla $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ będzie całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w K.

(a) Pokaż, że wyznacznik pierścienia A wynosi d jeśli $d \equiv 1 \pmod 4$ lub $4d$ w pozostałych przypadkach.

(b) Użyj oszacowania Minkowskiego, by pokazać, że $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ jest dziedziną ideałów głównych.

(c) Użyj tego samego oszacowania by pokazać, że każdy nietrywialny element grupy klas dziedziny Dedekinda $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ jest klasą ideału maksymalnego zawierającego 2 lub 3.

Zadanie 2
Niech $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ i niech $\mathfrak{m} = (2, 1 - \sqrt{-13})$.

(a) Pokaż, że $\mathfrak{m}$ nie jest ideałem głównym.
Wskazówka: użyj podobnego argumentu jak na wykładzie dla $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(b) Wywnioskuj, że $\mathrm{Cl}(A) \simeq \mathbb{Z}/2$. *Wskazówka: poprzednie zadanie i bezpośrednie przeliczenie.*

Zadanie 3
Celem tego zadania jest znalezienie wszystkich rozwiązań całkowitych równania $x^2 + 13 = y^3$. Ustalmy jedno takie rozwiązanie (x, y). Niech $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.

(a) Pokaż bezpośrednio, że liczba całkowita x jest parzysta i niepodzielna przez 13.

(b) Pokaż, że ideał A generowany przez $x + \sqrt{-13}, x - \sqrt{-13}$ jest równy (1). *Wskazówka: zadanie 1.*

(c) Pokaż, że w A zachodzi równość $(x+\sqrt{-13})(x-\sqrt{-13}) = y^3$. Uzasadnij, że istnieją ideały $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ takie, że
$$\mathfrak{a}^3 = (x + \sqrt{-13}), \quad \mathfrak{b}^3 = (x - \sqrt{-13}). \tag{1}$$
Wskazówka: w A ideał rozkłada się jednoznacznie jako iloczyn ideałów pierwszych.

(d) Wykaż, że istnieją $a, b \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathfrak{a} = (a + b\sqrt{-13})$.
Wskazówka: $\mathrm{Cl}(A) \simeq \mathbb{Z}/2$ *a trzykrotność* $\mathfrak{a}$ *w niej jest trywialna.*

(e) Z równania (1) wywnioskuj, że $x = a^3 - 39ab^2$ oraz $1 = 3a^2b - 13b^3$. Z drugiego równania wylicz $b = \pm 1$ i ostatecznie $b = -1$, $a = \pm 2$. Zatem równanie $x^2 + 13 = y^3$ ma dokładnie dwa rozwiązania $(x, y) = (\pm 70, 17)$ w $\mathbb{Z}$.

Zadanie 4 Zadanie dodatkowe, formuła ref z algebraicznej teorii liczb, 4pkt
Niech $\mathbb{Q} \subset K$ będzie skończonym rozszerzeniem ciał, niech $n = \dim_{\mathbb{Q}} K$. W tym zadaniu uznajemy za dane, że $\mathcal{O}_K$ jest skończenie generowaną grupą abelową.

(a) Niech pierścień R będzie dziedziną ideałów głównych i niech F będzie R-modułem wolnym skończenie generowanym. Pokaż, że każdy R-podmoduł modułu F też jest wolny. *Wskazówka: indukcja po liczbie generatorów i ciągi dokładne* $0 \to R^{\oplus k-1} \to R^{\oplus k} \to R^{\oplus 1} \to 0$. *Potencjalnie warto pominąć ten podpunkt przy rozwiązywaniu po raz pierwszy.*

(b) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą K nad $\mathbb{Q}$. Pokaż, że istnieje d takie, że $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{Z}(\alpha_1/d) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(\alpha_n/d)$. Wywnioskuj, że $\mathcal{O}_K$ jest wolną grupą abelową.

(c) Niech $\alpha \in K$. Pokaż, że istnieje $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ takie, że $e\alpha \in \mathcal{O}_K$. Wywnioskuj, że $(\mathbb{Z} \setminus 0)^{-1}\mathcal{O}_K = K$. Wywnioskuj, że $\mathcal{O}_K$ jest wolną grupą abelową rangi n.

(d) Niech $p \in \mathbb{Z}$ będzie liczbą pierwszą i niech $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ będą wszystkimi elementami $V(p) \subset \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Niech f_i będzie stopniem rozszerzenia ciał $\mathbb{Z}/p \subset \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_i$ i niech e_i będzie waluacją elementu p w $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_i}$. Pokaż, że
$$n = \sum_{i=1}^{r} e_i f_i.$$
Zatem e_i, f_i nie mogą być zbyt duże. *Wskazówka:* $\dim_{\mathbb{Z}/p}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K) = n$.