Algebra Przemienna
XI seria zadań (na wtorek 12.01)

Trochę teorii liczb. Na dysku google pojawiły się pełne rozwiązania zadań 3 i 5 z ostatniej serii.

Zadanie 1 2 PKT
Niech d będzie niezerową liczbą całkowitą. Załóżmy, że d jest bezkwadratowa (tzn. żaden kwadrat liczby pierwszej nie dzieli d). Celem tego zadania jest znalezienie całkowitego domknięcia $\mathbb{Z}$ w ciele $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Oznaczmy to domknięcie przez A.

(a) Pokaż/przypomnij, że jedyne elementy z $\mathbb{Q}$ całkowite nad $\mathbb{Z}$ to elementy $\mathbb{Z}$.

(b) Załóżmy, że $a + b\sqrt{d} \in A$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Q}$. Pokaż, że $a - b\sqrt{d}$ także leży w A. Wywnioskuj, że $2a, 2b\sqrt{d}, 4b^2d, a^2 - db^2 \in A$. Wywnioskuj, że $2a, (2b)^2, a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$. *Wskazówka: A jest pierścieniem.*

(c) Pokaż, że jeśli $a, b \in \mathbb{Q}$ są takie, że $a^2 - db^2, 2a \in \mathbb{Z}$, to $a + b\sqrt{d} \in A$. *Wskazówka: wypisz wielomian.*

(d) Pokaż, że jeśli $d \equiv 1 \pmod 4$, to $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ zaś w przeciwnym przypadku $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Zadanie 2 2 PKT

(a) Niech $\mathcal{O}_\nu$ będzie pierścieniem waluacji na pewnym ciele K i niech $0 \neq t \in \mathfrak{m}_\nu$. Pokaż, że $(\mathcal{O}_\nu)_t = K$. Pokaż, że nie istnieje pierścień A taki, że $\mathcal{O}_\nu \subsetneq A \subsetneq K$.

(b) Niech ν będzie waluacją na $\mathbb{Q}$. Pokaż, że $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_\nu$. Pokaż, że $\mathfrak{m}_\nu \cap \mathbb{Z}$ jest ideałem maksymalnym, niech będzie to (p). Pokaż, że $\mathcal{O}_\nu = \mathbb{Z}_{(p)}$. *Wskazówka: ostatnia część z poprzedniego podpunktu.*

(c) Opisz wszystkie waluacje na $\mathbb{Q}$.

Zadanie 3
Niech $\mathfrak{p}$ będzie minimalnym niezerowym ideałem pierwszym w normalnej dziedzinie Noetherowskiej A. Pokaż, że $A_\mathfrak{p}$ jest pierścieniem waluacji dyskretnej.

Zadanie 4 ZADANIE DODATKOWE
Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki nierównej dwa. Pokaż, że ideał $(x, y) \subset \Bbbk[x, y]/(y^2 - x^3 - x)$ nie jest główny i wywnioskuj, że ta krzywa eliptyczna jest dziedziną Dedekinda, która nie jest dziedziną ideałów głównych. *Wskazówka: gdyby f było generatorem to generowałoby też przestrzeń kostyczną w $(0, 0)$.*