Algebra Przemienna
X seria zadań (na środę wydziałową 8 stycznia)

termin deklarowania do 13:00, 7 stycznia

Ta seria jest wyjątkowa w tym sensie, że jej głównym celem jest przećwiczenie wielu twierdzeń z ostatniego wykładu. UFD poniżej oznacza dziedzinę z jednoznacznością rozkładu (z ang. unique factorization domain).

Zadanie 1
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki nierównej dwa. Pokaż, że każdy ideał maksymalny w $\Bbbk[x,y]/(y^2-x^3-x)$ jest regularny. Czy jest to prawdą również dla ciała $\Bbbk$ algebraicznie domkniętego charakterystyki dwa? *Wskazówka: policz Jakobian.*

Zadanie 2 REGULARNY IMPLIKUJE NORMALNY
Niech A będzie dziedziną z ciałem ułamków K.

(a) Dla $f \in K$ niech $I_f := \{a \in A \mid af \in A\}$. Pokaż, że I_f jest ideałem w A oraz, że $f \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_f = (1)$. Ideał I_f nazywamy *ideałem mianowników* f.

(b) Pokaż, że $A = \bigcap\{A_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\max}(A)\}$. *Wskazówka: rozważ I_f dla f należącego do prawej strony.*

(c) Pokaż, że jeśli wszystkie pierścienie lokalne $A_{\mathfrak{m}}$ są normalnymi dziedzinami (patrz seria VIII), to A jest normalną dziedziną. *Wskazówka: przecięcie normalnych jest normalne.*

(d) Wywnioskuj, że jeśli wszystkie ideały maksymalne A są regularne, to A jest normalną dziedziną. *Wskazówka: twierdzenie z wykładu mówi, że regularne są UFD.*

Uwaga: niestety/szczęśliwie nie jest prawdą, że przecięcie UFD jest UFD, zobaczymy przykłady.

Zadanie 3
Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem i niech $S = \Bbbk[x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}]$ będzie pierścieniem wielomianów. Niech $f_1 = x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}$, $f_2 = x_{13}x_{21} - x_{23}x_{11}$, $f_3 = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$ i niech $I = (f_1, f_2, f_3)$.

(a) Oblicz, że w każdym punkcie $V(I) \subset \Bbbk^6$ różnym od zera ranga Jakobianu f_1, f_2, f_3 wynosi 2. *Wskazówka: by pokazać, że nie wynosi ona trzy, np. wskaż niezerowy wektor w jądrze związanego z nią przekształcenia $\Bbbk^3 \to \Bbbk^6$.*

(b) Wywnioskuj z twierdzeń z wykładu, że $\dim S/I = 4$.

(c) Utożsamijmy punkt $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23} \in \Bbbk^6$ z macierzą $[\alpha_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2,3}$. Uzasadnij, że $V(I)$ jest zbiorem macierzy rangi co najwyżej jeden.

Zadanie 4 ZADANIE DODATKOWE
Niech $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+m}]$ i załóżmy, że wyznacznik macierzy $[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]_{i,j=1,\ldots,m}$ jest niezerowy w pewnym ideale maksymalnym $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\max}(S/I)$. Pokaż, że $\dim(S/I)_{\mathfrak{m}} = n$. Wywnioskuj, że $\mathfrak{m}$ jest regularnym ideałem w S/I. *Uwaga: jeśli wszystkie punkty $\mathrm{Spec}_{\max}(S/I)$ spełniają powyższy warunek to w szczególności $\dim(S/I) = n$. Mówimy wtedy, że $f_1, \ldots, f_m$ są zupełnym przecięciem.*

Zadanie 5 ZADANIE DODATKOWE
Niech $i\colon \Bbbk[t^2, t^3] \to \Bbbk[t]$ będzie naturalnym włożeniem.

(a) Pokaż, że $\Bbbk[t^2, t^3] \simeq \Bbbk[x,y]/(x^3 - y^2)$.

(b) Pokaż, że $\Bbbk[t]$ jest całkowitym domknięciem $\Bbbk[t^2, t^3]$ w ciele ułamków.

(c) Pokaż, że $i^*\colon \mathrm{Spec}(\Bbbk[t]) \to \mathrm{Spec}(\Bbbk[t^2, t^3])$ jest bijekcją.

(d) Dla każdego punktu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\Bbbk[t^2, t^3])$ opisz włókno $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\Bbbk[t^2,t^3]} \Bbbk[t]$.

(e) Pokaż, że jeśli $j\colon A \to B$ jest skończonym homomorfizmem zredukowanych pierścieni noetherowskich takim, że dla każdego punktu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ homomorfizm $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ jest izomorfizmem, to j jest izomorfizmem.