Algebra Przemienna
I seria zadań (na środę 21.10)

Pierwsza seria ma służyć sprawdzeniu, gdzie jesteśmy; nie powinni Państwo zbytnio przejmować się ewentualnymi trudnościami. W każdym zadaniu/podpunkcie zadania można korzystać z poprzednich. Jeśli umieją Państwo np. wywnioskować 1d z poprzednich podpunktów, ale nie umieją Państwo ich zrobić, można zgłosić 1d. W przypadku wątpliwości i pytań proszę pisać e-mailowo. Powodzenia! JJ

Przypomnienie: na tym wykładzie wszystkie pierścienie są łączne, przemienne i mają jedynkę. Ideał I pierścienia R jest *pierwszy*, jeżeli dla każdych $a, b \in R$ warunek $ab \in I$ implikuje $a \in I$ lub $b \in I$. Ideał I jest *maksymalny* jeżeli jest właściwym ideałem maksymalnym względem inkluzji, tzn. jeżeli $I \neq R$ oraz nie istnieje ideał J taki, że $I \subsetneq J \subsetneq R$.

Zadanie 1 2 PKT
Niech R będzie pierścieniem, zaś $I \subset R$ ideałem. Niech $\pi\colon R \to R/I$ będzie kanonicznym epimorfizmem.

(a) Pokaż, że R/I jest dziedziną wtedy i tylko wtedy, gdy I jest pierwszy.

(b) Pokaż, że R/I jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy I jest maksymalny.

(c) Pokaż, że $\bar{J} \mapsto \pi^{-1}(\bar{J})$ jest bijekcją pomiędzy zbiorem ideałów w pierścieniu R/I oraz zbiorem ideałów w pierścieniu R zawierających I.

(d) Wywnioskuj, że bijekcja z (c) obcina się do bijekcji pomiędzy ideałami pierwszymi w R/I a ideałami pierwszymi w R zawierającymi I. Pokaż to samo dla ideałów maksymalnych. *Wskazówka: mając poprzednie podpunkty, ten można wywnioskować bez żadnych obliczeń.*

Zadanie 2 2 PKT
Niech R będzie pierścieniem funkcji ciągłych $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z dodawaniem i mnożeniem po wartościach, to znaczy $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ i $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

(a) Pokaż, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\mathfrak{m}_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ jest ideałem maksymalnym.

(b) Czy zbiór złożony z funkcji zbieżnych do zera w nieskończoności jest ideałem maksymalnym?

(c) Czy zbiór funkcji równych zero dla dostatecznie dużych x jest ideałem maksymalnym?

Zadanie 3
Niech B będzie pierścieniem, zaś $A \subset B$ podpierścieniem. Niech $\mathfrak{m} \subset B$ będzie ideałem maksymalnym. Czy ideał $\mathfrak{m} \cap A$ jest maksymalny? Czy $\mathfrak{m} \cap A$ jest pierwszy?

Zadanie 4
Pierścień R ma skończenie wiele elementów. Pokaż, że każdy jego ideał pierwszy jest maksymalny. *Wskazówka: przejdź do pierścienia ilorazowego.*

Zadanie 5 ZADANIE DODATKOWE, 3PKT
Niech $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Niech R oznacza pierścień funkcji ciągłych $S^1 \to \mathbb{R}$ z mnożeniem i dodawaniem po wartościach, tzn. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ i $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

(a) Dla $x \in S^1$ niech $\mathfrak{m}_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$. Pokaż, że $\mathfrak{m}_x \subset R$ jest ideałem maksymalnym.

(b) Niech $\mathfrak{n} \subset R$ będzie ideałem maksymalnym i załóżmy, że $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}_x$. Pokaż, że istnieje funkcja $f \in \mathfrak{n}$ taka, że $f(x) \neq 0$ i dla wszystkich $y \in S^1$ mamy $f(y) \geqslant 0$.

(c) Niech $\mathfrak{n} \subset R$ będzie ideałem maksymalnym takim, że $\mathfrak{n} \notin \{\mathfrak{m}_x \mid x \in S^1\}$. Pokaż, że istnieje funkcja $f \in \mathfrak{n}$ taka, że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in S^1$. Pokaż, że f jest odwracalna i wywnioskuj, że $\mathfrak{n} = (1)$ nie jest ideałem maksymalnym. Zatem ideały maksymalne R to dokładnie zbiory funkcji znikających w danym punkcie.

Wskazówka: dla każdego punktu $x \in S^1$ rozważ funkcję $f = f_x$ jak w punkcie 2. i podzbiór otwarty

$$U_x = \{y \in S^1 \mid f_x(y) > 0\} \subset S^1.$$

(d) Czy wniosek z punktu 3. powyżej można uogólnić z S^1 na dowolną zwartą przestrzeń topologiczną? Czy można go uogólnić na dowolną przestrzeń topologiczną?