



Zadania domowe VI

WSTĘP DO MATEMATYKI
NA 22 STYCZNIA 2020

ZADANIE 1

Udowodnij, że każda relacja równoważności jest porządkiem. Załóżmy, że porządek \preceq jest relacją równoważności. Czy wynika z tego, że

1. istnieje element najmniejszy dla \preceq ?
2. każdy element jest minimalny dla \preceq ?

ZADANIE 2

Niech (\mathbb{N}, \leq) oraz (\mathbb{Q}, \leq) będą standardowymi porządkami. Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ wprowadzamy *porządek leksykograficzny* tzn. $(a, b) \leq_{lex} (a', b') \iff (a < a' \vee (a = a' \wedge b \leq b'))$.

1. Czy porządek \leq_{lex} jest liniowy?
2. Czy zbiory uporządkowane (\mathbb{N}, \leq) i $(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}, \leq_{lex})$ są izomorficzne?

ZADANIE 3

Niech \mathcal{Z} będzie rodziną niepustych domkniętych przedziałów o końcach całkowitych, tzn.

$$\mathcal{Z} = \{[k, l] \subset \mathbb{R} : k, l \in \mathbb{Z} \wedge k \leq l\},$$

a \mathcal{Q} będzie rodziną niepustych domkniętych przedziałów o końcach wymiernych, tzn.

$$\mathcal{Q} = \{[p, q] \subset \mathbb{R} : p, q \in \mathbb{Q} \wedge p \leq q\}.$$

Rodziny \mathcal{Z} i \mathcal{Q} porządkujemy przez inkluzję.

1. Ile jest w zbiorze częściowo uporządkowanym (\mathcal{Z}, \subset) elementów maksymalnych, minimalnych, największych oraz najmniejszych?
2. Czy porządek na (\mathcal{Q}, \subset) jest liniowy? Czy jest on gęsty?
Uwaga: porządek jest gęsty, jeśli dla każdych $a < b$ istnieje c takie, że $a < c < b$.

ZADANIE 4

Zbiór $A = \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k \leq l\}$ jest uporządkowany przez \leq_{prod} . Pokaż, że w dowolnym łańcuchu $X \subset A$ istnieje element najmniejszy. Czy teza pozostaje prawdziwa dla $A = \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_{\geq 0} : k \leq l\}$?
Wskazówka: w skończonym łańcuchu zawsze istnieje element najmniejszy.