Zadania domowe VI

WSTĘP DO MATEMATYKI
NA 22 STYCZNIA 2020

ZADANIE 1
Udowodnij, że każda relacja równoważności jest porządkiem. Załóżmy, że porządek $\preceq$ jest relacją równoważności. Czy wynika z tego, że

1. istnieje element najmniejszy dla $\preceq$?
2. każdy element jest minimalny dla $\preceq$?

Rozwiązanie.
Załóżmy, że $\preceq$ jest relacją równoważności, która jest jednocześnie porządkiem. Załóżmy, że x, y są takie, że $x \preceq y$. Wtedy

1. z aksjomatu symetryczności dla relacji równoważności mamy $y \preceq x$.
2. z aksjomatu antysymetryczności dla porządku $\preceq$ mamy $x \preceq y \wedge y \preceq x \implies y = x$.

Wobec tego relacja $\preceq$ spełnia implikację $\forall_{x,y} x \preceq y \implies x = y$, co pokazuje, że $\preceq$ jest po prostu równością. W szczególności każdy element jest minimalny.
Kontrprzykłady:

1. Nie każda relacja równoważności jest porządkiem $\ddot\smile$. Konkretniej, niech $\equiv$ będzie relacją równoważności na $\{1, 2\}$ taką, że $1 \equiv 2$. Załóżmy, że $\equiv$ jest porządkiem. Rozumując jak powyżej, wnioskujemy, że $1 = 2$, sprzeczność.
2. Niech $\preceq$ będzie trywialnym porządkiem na $\{1, 2\}$ tzn. definiujemy $a \preceq b \iff a = b$. Wtedy $\preceq$ jest relacją równoważności (bo jest relacją równości) ale nie ma elementu najmniejszego.

ZADANIE 2
Niech $(\mathbb{N}, \leqslant)$ oraz $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ będą standardowymi porządkami. Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ wprowadzamy *porządek leksykograficzny* tzn. $(a, b) \leqslant_{lex} (a', b') \iff (a < a' \vee (a = a' \wedge b \leqslant b'))$.

1. Czy porządek $\leqslant_{lex}$ jest liniowy?
2. Czy zbiory uporządkowane $(\mathbb{N}, \leqslant)$ i $(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}, \leqslant_{lex})$ są izomorficzne?

Rozwiązanie.
1. Porządek $\leqslant_{lex}$ jest liniowy. Zaiste weźmy elementy $(a, b), (a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Ewentualnie zamieniając je miejscami, możemy założyć, że $a \leqslant a'$. Jeśli $a < a'$ to $(a, b) \leqslant (a', b')$. Załóżmy, że $a = a'$. Wtedy albo $b \leqslant b'$ i $(a, b) \leqslant (a', b')$ albo $b' \leqslant b$ i wtedy $(a', b') \leqslant (a, b)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że dowolne dwa elementy są porównywalne.

2. Zbiory $(\mathbb{N}, \leqslant)$ i $(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}, \leqslant_{lex})$ nie są izomorficzne, bo pierwszy z nich posiada element najmniejszy: zero, zaś drugi z nich nie. Zaprawdę, załóżmy, że $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ jest elementem najmniejszym. Wtedy $(a, b - 1) < (a, b)$, sprzeczność.

ZADANIE 3
Niech $\mathcal{Z}$ będzie rodziną niepustych domkniętych przedziałów o końcach całkowitych, tzn.

$$\mathcal{Z} = \{[k, l] \subset \mathbb{R} \ : \ k, l \in \mathbb{Z} \wedge k \leqslant l\},$$

a $\mathcal{Q}$ będzie rodziną niepustych domkniętych przedziałów o końcach wymiernych, tzn.

$$\mathcal{Q} = \{[p, q] \subset \mathbb{R} \ : \ p, q \in \mathbb{Q} \wedge p \leqslant q\}.$$

Rodziny $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{Q}$ porządkujemy przez inkluzję.

1. Ile jest w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\mathcal{Z}, \subset)$ elementów maksymalnych, minimalnych, największych oraz najmniejszych?
2. Czy porządek na $(\mathcal{Q}, \subset)$ jest liniowy? Czy jest on gęsty?
   Uwaga: porządek jest gęsty, jeśli dla każdych $a < b$ istnieje c takie, że $a < c < b$.

Rozwiązanie.

1. Jeśli $[k,l] \in \mathcal{Z}$, to $[k] \leqslant [k,l] < [k-1,l]$ oraz $[l] \leqslant [k,l]$. To pokazuje, że $[k,l]$ nie jest elementem maksymalnym, czyli *nie istnieją elementy maksymalne ani element największy.* Ponadto, jeśli $[k,l]$ jest minimalny, to $[k,l] = [k] = [l]$, czyli jedyne potencjalne elementy minimalne to przedziały jednoelementowe. Jeśli $[a,b] \leqslant [k]$ to znaczy, że $a,b \in [k]$, czyli $a = k = b$. Zatem faktycznie *każdy przedział jednoelementowy jest minimalny.* W szczególności istnieje więcej niż jeden element minimalny, czyli nie ma elementu najmniejszego.
2. Porządek na $\mathcal{Q}$ *nie jest* liniowy, bo przykładowo dla dowolnych $p \neq q \in \mathbb{Q}$ elementy $[p]$ i $[q]$ są nieporównywalne. Porządek ten *jest* gęsty, bo jeśli $[p_1,q_1] < [p_2,q_2]$, to możemy położyć

$$[p_1,q_1] < \left[\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{q_1+q_2}{2}\right] < [p_2,q_2].$$

(zauważmy, że korzystamy tu z faktu, że przedziały mają końce w $\mathbb{Q}$. Porządek na $\mathcal{Z}$ nie jest gęsty)

Zadanie 4

Zbiór $A = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ k \leqslant l\}$ jest uporządkowany przez $\leqslant_{prod}$. Pokaż, że w dowolnym łańcuchu $X \subset A$ istnieje element najmniejszy. Czy teza pozostaje prawdziwa dla $A = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \ : \ k \leqslant l\}$?
Wskazówka: w skończonym łańcuchu zawsze istnieje element najmniejszy.

Rozwiązanie.

Weźmy dowolny łańcuch $X \subset A$ i dowolny element $x = (k,l) \in X$. Elementy łańcucha X nie większe niż x to

$$A_{\leqslant x} := \{(k',l') \in X \ : \ k' \leqslant k \wedge l' \leqslant l\}.$$

Zbiór $A_{\leqslant x} \subset \{(k',l') \in \mathbb{N}^2 \ : \ k' \leqslant k \wedge l' \leqslant l\}$ ma skończenie wiele elementów, co najwyżej $(k+1)(l+1)$. Zbiór $A_{\leqslant x}$ jest liniowo uporządkowany bo jest podzbiorem łańcucha X. Zatem istnieje w nim element najmniejszy $y \in A_{\leqslant x}$. Skoro $x \in A_{\leqslant x}$, to w szczególności $y \leqslant x$.

Twierdzimy, że y jest elementem najmniejszym w X. Weźmy jakikolwiek element $z \in X$. Skoro X jest łańcuchem, to elementy x i z są porównywalne, więc $x \leqslant z$ lub $z \leqslant x$. Jeśli $x \leqslant z$ to $y \leqslant x \leqslant z$, więc $y \leqslant z$. Jeśli $z \leqslant x$, to $z \in A_{\leqslant x}$, zatem $y \leqslant z$ z definicji y. Zatem $y \leqslant z$ w obu wypadkach. Pokazaliśmy, że y jest elementem najmniejszym w X.

Teza nie byłaby prawdziwa dla $A = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \ : \ k \leqslant l\}$. Zaiste, podzbiór

$$X^! := \{(0,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \ : \ q > 0\}$$

jest łańcuchem i dla każdego $(0,x) \in X^!$ mamy $(0,x/2) < (0,x)$ w $X^!$, czyli $X^!$ nie ma elementu najmniejszego.