



Zadania domowe V

WSTĘP DO MATEMATYKI
NA 15 STYCZNIA 2020

ZADANIE 1

Czy na zbiorze \mathbb{N} istnieje relacja równoważności, która ma pięć klas abstrakcji: dwie mocy $|\mathbb{N}|$, dwie mocy 2019 oraz jedna mocy 1?

ZADANIE 2

Relacja \equiv na $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ jest określona przez

$$f \equiv g \iff \lim_{n \in \infty} (f(n) - g(n)) = 0.$$

Pokaż, że \equiv jest relacją równoważności, znajdź moc zbioru $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \equiv$ oraz moce wszystkich klas abstrakcji.

ZADANIE 3

Na zbiorze $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ wprowadzamy relację równoważności \equiv poprzez

$$A \equiv B \iff (|A| = |B| \wedge pr_1[A] = pr_1[B]),$$

gdzie $pr_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną, czyli $pr_1(x, y) = x$.

1. Znajdź moc klasy abstrakcji $[\{1\} \times \mathbb{N}]_{\equiv}$.
2. Uzasadnij, że jeśli $C \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest zbiorem dwuelementowym, to klasa abstrakcji $[C]_{\equiv}$ jest równoliczna z \mathbb{N} .

ZADANIE 4

W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określamy relację równoważności \equiv poprzez

$$f \equiv g \iff \forall_{n \geq 101} f(n) = g(n).$$

1. Niech funkcja $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zadana wzorem $f(n) = 2n^2 + 1$. Znajdź moc zbioru $[f]_{\equiv}$.
2. Czy istnieje $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że $|[g]_{\equiv}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv|$?