Zadania domowe V

WSTĘP DO MATEMATYKI

Na 15 stycznia 2020

Zadanie 1

Czy na zbiorze $\mathbb{N}$ istnieje relacja równoważności, która ma pięć klas abstrakcji: dwie mocy $|\mathbb{N}|$, dwie mocy 2019 oraz jedna mocy 1?

Rozwiązanie.

Tak. Rozważmy podział $\mathbb{N}$ na zbiory $\{0\}$, $\{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$, $\{1 + 2019, 2 + 2019 \ldots, 2019 + 2019\}$ oraz zbiory $\{x \in \mathbb{N} \ : 2 \nmid x, x > 2 \cdot 2019\}$ i $\{x \in \mathbb{N} \ : 2 | x, x > 2 \cdot 2019\}$. Relację równoważności ustalamy przez $x \equiv y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y leżą w tym samym zbiorze.

Zadanie 2

Relacja $\equiv$ na $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ jest określona przez

$$f \equiv g \iff \lim_{n \to \infty} (f(n) - g(n)) = 0.$$

Pokaż, że $\equiv$ jest relacją równoważności, znajdź moc zbioru $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \equiv$ oraz moce wszystkich klas abstrakcji.

Rozwiązanie.

Relacja jest zwrotna, bo $\lim_{n\to\infty}(f(n) - f(n)) = 0$ oraz symetryczna, bo $\lim(g(n) - f(n)) = -\lim(f(n) - g(n))$. Wreszcie, jest ona przechodnia, bo jeśli $f \equiv g \equiv h$ to znaczy, że $\lim_{n\to\infty}(f(n)-g(n)) = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty}(g(n)-h(n)) = 0$. Wtedy bezpośrednio z definicji granicy mamy

$$\lim_{n\to\infty} (f(n) - h(n)) = \lim_{n\to\infty} (f(n) - g(n)) + (g(n) - h(n)) = \lim(f(n) - g(n)) + \lim(g(n) - h(n)) = 0 + 0 = 0.$$

Zatem $\equiv$ jest relacją równoważności.

Przypomnijmy, że $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, zatem $|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, jak pokazywaliśmy na ćwiczeniach. Mamy surjekcję $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \equiv$, więc

$$\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \equiv\right| \leqslant |\mathbb{R}|.$$

Z drugiej strony, każdą liczbę rzeczywistą r można otrzymać jako granicę pewnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach wymiernych. Zdefiniujmy $L(r) := \left\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \ \lim f(n) = r\right\}$. Wtedy $L(r) \neq \emptyset$ bo funkcja $f(n) := a_n$ leży w $L(r)$. Zatem $\{L(r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ są różnymi klasami abstrakcji, czyli jest co najmniej $|\mathbb{R}|$ klas abstrakcji. To dowodzi, że

$$\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \equiv\right| = |\mathbb{R}|.$$

Pozostaje znaleźć moc klasy abstrakcji $[f]_{\equiv}$ dla każdego f. Z definicji, $g \in [f]_{\equiv}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f - g \in L(0)$. Przyporządkowanie $g \mapsto f - g$ jest bijekcją pomiędzy $[f]_{\equiv}$ a $L(0)$. Pozostaje znaleźć moc zbioru $L(0)$.

Skoro $L(0) \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, to $|L(0)| \leqslant |\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Z drugiej strony mamy injekcję $i \colon 2^{\mathbb{N}} \to L(0)$ zdefiniowaną wzorem

$$i(a_0, \ldots)(n) = \frac{a_n}{n}.$$

(Innymi słowy, injekcja i przypisuje ciągowi $(a_0, a_1, \ldots)$ złożonemu z zer i jedynek ten sam ciąg, tylko n-ty wyraz jest podzielony przez n.) Injekcja i pokazuje, że

$$|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |L(0)|.$$

Ale $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$, więc z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|L(0)| = |\mathbb{R}|$. Zatem każda klasa abstrakcji ma moc continuum.

Zadanie 3

Na zbiorze $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ wprowadzamy relację równoważności $\equiv$ poprzez

$$A \equiv B \iff (|A| = |B| \wedge pr_1[A] = pr_1[B]),$$

gdzie $pr_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną, czyli $pr_1(x, y) = x$.

1. Znajdź moc klasy abstrakcji $[\{1\} \times \mathbb{N}]_{\equiv}$.
2. Uzasadnij, że jeśli $C \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest zbiorem dwuelementowym, to klasa abstrakcji $[C]_{\equiv}$ jest równoliczna z $\mathbb{N}$.

Rozwiązanie.

Zbiór A należy do $[\{1\} \times \mathbb{N}]_{\equiv}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| = |\mathbb{N}|$ oraz $pr_1(A) = \{1\}$. Innymi słowy, wymieniona klasa abstrakcji składa się ze zbiorów postaci

$$\{1\} \times X,$$

gdzie $X \subset \mathbb{N}$ jest zbiorem nieskończonym. Wobec tego klasa ta jest w bijekcji z rodziną

$$\mathcal{F} = \{X \in P(\mathbb{N}) \ : \ |X| = |\mathbb{N}|\}.$$

Mamy $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(\mathbb{N})$, więc $|\mathcal{F}| \leqslant |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Z drugiej strony, mamy injekcję $i \colon P(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$ zadaną wzorem

$$i(A) = \{2a + 1 \ : \ a \in A\} \cup \{2n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Zatem $|P(\mathbb{N})| \leqslant |\mathcal{F}|$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina mamy $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}|$; moc klasy abstrakcji to continuum.

Skoro C jest dwuelementowy, to każdy zbiór w jego klasie abstrakcji też. Podzbiorów dwuelementowych w $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest tyle ile liczb naturalnych, bo po pierwsze jest ich nieskończenie wiele, a po drugie mamy funkcję

$$\varphi \colon (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$$

taką, że $\varphi((a, b), (c, d)) = \{(a, b), (c, d)\}$. Wszystkie zbiory dwuelementowe leżą w jej obrazie, zatem jest ich co najwyżej $|(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathbb{N}^4|$. Na ćwiczeniach pokazywaliśmy, że $|\mathbb{N}^4| = |\mathbb{N}|$. Łącznie pokazaliśmy, że $|\mathbb{N}| \leqslant |[C]_{\equiv}| \leqslant |\mathbb{N}|$, czyli $|[C]_{\equiv}| = |\mathbb{N}|$ korzystając kolejny raz z Cantora-Bernsteina.

Zadanie 4

W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określamy relację równoważności $\equiv$ poprzez

$$f \equiv g \iff \forall_{n \geqslant 101} \ f(n) = g(n).$$

1. Niech funkcja $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zadana wzorem $f(n) = 2n^2 + 1$. Znajdź moc zbioru $[f]_{\equiv}$.
2. Czy istnieje $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że $|[g]_{\equiv}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv|$?

Rozwiązanie.

Ogólniej niech h będzie dowolną funkcją; twierdzimy, że istnieje naturalna bijekcja $\varphi \colon [h]_{\equiv} \to \mathbb{N}^{101}$ zadana wzorem

$$\varphi(h) = (h(0), h(1), \ldots, h(100)).$$

Sprawdźmy porządnie, że φ jest bijekcją. Załóżmy, że $g_1, g_2 \in [h]_{\equiv}$ są takie, że $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Znaczy to, że $\forall_{n \leqslant 100} g_1(n) = g_2(n)$. Skoro $g_1, g_2 \in [h]_{\equiv}$, to $\forall_{n \geqslant 101} g_1(n) = f(n) = g_2(n)$. Łącznie mamy $\forall_n \ g_1(n) = g_2(n)$, stąd $g_1 = g_2$. Pokazaliśmy, że φ jest różnowartościowe.

Ponadto φ jest oczywiście surjektywne: dla dowolnego ciągu $(a_0, \ldots, a_{100}) \in \mathbb{N}^{101}$ funkcja

$$g(n) = \begin{cases} a_n & n \leqslant 100 \\ h(n) & \text{inaczej} \end{cases}$$

należy do $[h]_{\equiv}$ oraz spełnia $\varphi(g) = (a_0, \ldots, a_{100})$.

Skoro φ jest bijekcją, to $|[h]_{\equiv}| = |\mathbb{N}^{101}| = |\mathbb{N}|$; ostatnią z tych równości pokazaliśmy na ćwiczeniach. W szczególności $|(2n^2 + 1)|_{\equiv} = |\mathbb{N}|$.

Pokażmy teraz, że $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv$ jest w bijekcji z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Intuicyjnie, chcemy odrzucić wartości funkcji w 0, 1, ..., 100. Formalnie, definiujemy

$$\Phi \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv$$

poprzez

$$\Phi(f)(n) = \begin{cases} 0 & n \leqslant 100 \\ f(n - 101) & n \geqslant 101 \end{cases}.$$

Wtedy Φ jest bijekcją, której odwrotnością jest funkcja $\Psi \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadana przez

$$\Psi([g]_{\equiv})(n) = g(n + 101).$$

(funkcja Ψ jest dobrze określona, bo jeśli wybierzemy dwie różne funkcje g_1, g_2 takie, że $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$, to $g_1(n + 101) = g_2(n + 101)$ dla każdego n.) Skoro $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv$ jest w bijekcji z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, to $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, jak pokazywaliśmy na ćwiczeniach.

Dla każdego $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mamy $|[g]_{\equiv}| = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$. Tak więc nie istnieje funkcja g taka, że $|[g]_{\equiv}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv|$.

Uwaga ogólna: porównaj definicje φ i Ψ. W pierwszej z nich traktujemy $[h]_{\equiv}$ jest podzbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. W drugiej z nich traktujemy $[g]_{\equiv}$ jako element $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv$.