Zadania domowe IV

WSTĘP DO MATEMATYKI
NA 18 GRUDNIA 2019

ZADANIE 1
Pokaż, że dowolna rodzina niepustych parami rozłącznych podzbiorów zbioru przeliczalnego jest przeliczalna.

Rozwiązanie.
Niech A będzie zbiorem przeliczalnym, zaś $\mathcal{R} \subset P(A)$ będzie rodziną jego podzbiorów. Na mocy aksjomatu wyboru, dla każdego zbioru $X \in \mathcal{R}$ wybieramy jego element $a_X \in X \subset A$. Zdefiniujmy funkcję

$$f \colon \mathcal{R} \to A$$

która elementowi $X \in \mathcal{R}$ przyporządkowuje $a_X \in A$. Jeśli $X, Y \in \mathcal{R}$ to $X \cap Y = \emptyset$, więc w szczególności $a_X \neq a_Y$. Zatem f jest różnowartościowa, a stąd $|\mathcal{R}| \leqslant |A| \leqslant |\mathbb{N}|$. Na mocy konwencji z wykładu („przeliczalny = skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$”), to kończy dowód.

ZADANIE 2
Zbiory X i Y są takie, że Y^X jest równoliczny z $\mathbb{N}$. Uzasadnij, że X jest niepusty skończony zaś Y jest przeliczalny.
Wskazówka: co stałoby się, gdyby X był nieskończony?

Rozwiązanie.
Przypomnijmy z ćwiczeń, że jeśli $|X'| \leqslant |X|$ oraz $|Y'| \leqslant |Y|$, to $|X'^{Y'}| \leqslant |X^{Y'}| \leqslant |X^Y|$.

Jeśli Y jest pusty, to Y^X jest pusty (dla $X \neq \emptyset$) lub jednoelementowy (dla $X = \emptyset$). Jeśli Y jest jednoelementowy, to Y^X jest także jednoelementowy. Zatem $|Y| \geqslant 2$. Podobnie, jeśli X jest pusty, to Y^X jest jednoelementowy. Zatem X jest niepusty. Skoro X jest niepusty, to

$$|\mathbb{N}| = |Y^X| \geqslant |Y^{\{1\}}| = |Y|,$$

zatem Y jest przeliczalny.

Jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to istnieje injekcja $\mathbb{N} \hookrightarrow X$. Zatem

$$|Y^X| \geqslant |2^X| \geqslant |2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|,$$

sprzeczność. Zbiór X musi być więc skończony. To kończy dowód. (oczywiście, Y musi być też nieskończony, bo jeśli jest skończony to skoro X i Y są skończone, to także Y^X także jest skończony.)

ZADANIE 3
Rozstrzygnij, które z poniższych zbiorów są równoliczne z $\mathbb{R}$:

1. zbiór wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych wymiernych,
2. zbiór wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o dokładnie jednej współrzędnej wymiernej,
3. zbiór wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych niewymiernych.

Wskazówka: na ćwiczeniach pokazaliśmy, że zbiór liczb niewymiernych jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

1. Ten zbiór jest równy $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ale $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, więc istnieje bijekcja $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Na ćwiczeniach pokazywaliśmy, że $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$. Łącząc te wszystkie fakty stwierdzamy, że $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest równoliczne z $\mathbb{N}$, a zatem nie jest równoliczne z $\mathbb{R}$.
2. Oznaczmy zbiór z zadania przez X. Skoro $X \subset \mathbb{R}^2$, to $|X| \leqslant |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ (przypomnijmy: dla każdego całkowitego dodatniego k zbiór $\mathbb{R}^k$ jest mocy continuum). Z drugiej strony X zawiera zbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}$, który jest w bijekcji ze zbiorem liczb niewymiernych. Na ćwiczeniach pokazywaliśmy, że $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$, zatem $|\mathbb{R}| \leqslant |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| \leqslant |X|$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że X jest równoliczny z $\mathbb{R}$.
3. Pokazujemy, że zbiór ten jest równoliczny z $\mathbb{R}$ według dokładnie tego samego argumentu co w poprzednim podpunkcie; stosujemy tylko podzbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{\sqrt{2}\}$ w miejsce $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}$.

ZADANIE 4
Pokaż, że zbiór

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{N} \;:\; |A| = |\mathbb{N} \setminus A|\}$$

jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.
Wskazówka: znajdź funkcję różnowartością $2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}$.

Rozwiązanie.

Po pierwsze, $\mathcal{A} \subset P(\mathbb{N})$, zatem $|\mathcal{A}| \leqslant |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Dla podzbioru $X \subset \mathbb{N}$ oraz $k, l \in \mathbb{N}$ wprowadźmy oznaczenie

$$k \cdot X + l := \{k \cdot x + l \ : \ x \in X\}\,.$$

Niech $R := 3 \cdot \mathbb{N} + 1$. Zdefiniujemy injekcję $\Phi \colon P(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}$ wzorem

$$\Phi(X) = (3 \cdot X) \cup R.$$

Zauważmy, że $|R| = |\mathbb{N}|$, więc $|\Phi(X)| = |\mathbb{N}|$. Ponadto $3 \cdot \mathbb{N} + 2 \subset \mathbb{N} \setminus \Phi(X)$, więc $|\mathbb{N}| = |3 \cdot \mathbb{N} + 2| \leqslant |\mathbb{N} \setminus \Phi(X)|$. Skoro mówimy o podzbiorach liczb naturalnych, to $|\Phi(X)| \leqslant |\mathbb{N}|$ oraz $|\mathbb{N} \setminus \Phi(X)| \leqslant |\mathbb{N}|$. Zatem z Cantora-Bernsteina $|\mathbb{N}| = |\Phi(X)| = |\mathbb{N} \setminus \Phi(X)|$. To pokazuje, że $\Phi(X) \in \mathcal{A}$, czyli funkcja Φ jest dobrze określona.

Funkcja Φ jest różnowartościowa: zaiste dla każdego zbioru $X \subset \mathbb{N}$ mamy

$$X = \frac{1}{3}(\Phi(X) \cap 3 \cdot \mathbb{N}).$$

Zatem Φ pokazuje, że $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| \leqslant |\mathcal{A}|$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina kończy to dowód.