Zadania domowe III

WSTĘP DO MATEMATYKI

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

Rozstrzygnij, czy zbiory $2^{\mathbb{N}}$ oraz $3^{\mathbb{N}}$ są równoliczne.

Sposób I

Tak. Na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina, wystarczy pokazać, że $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}|$ oraz $|2^{\mathbb{N}}| \geqslant |3^{\mathbb{N}}|$.

Skoro $\{0,1\} \subset \{0,1,2\} \subset \{0,1,2,3\}$ to $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}|$. Wystarczy więc pokazać, że $|3^{\mathbb{N}}| \leqslant |2^{\mathbb{N}}|$. Na ćwiczeniach wykazaliśmy, że $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, więc wystarczy pokazać $|3^{\mathbb{N}}| \leqslant |\mathbb{R}|$. W tym celu wystarczy wskazać funkcję różnowartościową $3^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. Taką funkcją jest przypisanie ciągowi (a_i) liczby z przedziału $(0,1)$, której kolejne cyfry dziesiętnego rozwinięcia to:

$$0, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_n\, \ldots.$$

To kończy dowód.

Sposób II

Tak. Na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina, wystarczy pokazać, że $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}|$ oraz $|2^{\mathbb{N}}| \geqslant |3^{\mathbb{N}}|$.

Pierwsza z tych nierówności jest prosta: $2^{\mathbb{N}}$ to funkcje z $\mathbb{N}$ do $\{0,1\}$, zaś $3^{\mathbb{N}}$ to funkcje z $\mathbb{N}$ do $\{0,1,2\}$. Zatem $2^{\mathbb{N}} \subset 3^{\mathbb{N}}$, a stąd $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}|$.

Na tej samej zasadzie zachodzi $|3^{\mathbb{N}}| \leqslant |4^{\mathbb{N}}|$. Pokażemy, że $|2^{\mathbb{N}}| = |4^{\mathbb{N}}|$ i to zakończy dowód.

Chcemy skonstruować bijekcję Φ ze zbioru $2^{\mathbb{N}}$ do $4^{\mathbb{N}}$. Zakładamy, że $0 \in \mathbb{N}$. (*Idea dowodu jest następująca: elementy zbioru czteroelementowego są w bijekcji z parami elementów zbioru dwuelementowego. Wartość funkcji z $4^{\mathbb{N}}$ na elemencie i będzie kodowała wartości funkcji z $2^{\mathbb{N}}$ na elementach $2i$ i $2i+1$. „Kodowanie” którego użyjemy to bijekcja $\{0,1\} \times \{0,1\} \ni (a,b) \mapsto 2a+b \in \{0,1,2,3\}$. Teraz przejdziemy do właściwego dowodu.*)

Niech $f \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Wtedy $\Phi(f) \colon \mathbb{N} \to \{0,1,2,3\}$ jest funkcją taką, że

$$\big(\Phi(f)\big)(i) = 2 \cdot f(2i) + f(2i+1).$$

To zadaje funkcję $\Phi \colon 2^{\mathbb{N}} \to 4^{\mathbb{N}}$. Definiujemy również funkcję $\Psi \colon 4^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$. Funkcja Ψ przyporządkowuje funkcji $g \colon \mathbb{N} \to \{0,1,2,3\}$ funkcję $\Psi(g)$ taką, że

$$\big(\Psi(g)\big)(2k) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \lfloor \frac{g(k)}{2} \rfloor \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ 1 & \text{gdy } \lfloor \frac{g(k)}{2} \rfloor \text{ jest liczbą parzystą} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \big(\Psi(g)\big)(2k{+}1) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \lfloor g(k) \rfloor \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ 1 & \text{gdy } \lfloor g(k) \rfloor \text{ jest liczbą parzystą} \end{cases}$$

(uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza tu największą liczbę całkowitą nie większą niż x)
Dla $f \in 2^{\mathbb{N}}$ funkcja $h := \Psi(\Phi(f))$ jest taka, że

$$h(2i) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \lfloor \frac{2f(2i)+f(2i+1)}{2} \rfloor \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ 1 & \text{gdy } \lfloor \frac{2f(2i)+f(2i+1)}{2} \rfloor \text{ jest liczbą parzystą} \end{cases}$$

ale $\lfloor \frac{2f(2i)+f(2i+1)}{2} \rfloor = f(2i)$, więc $h(2i) = f(2i)$. Podobnie pokazujemy, że $h(2i+1) = f(2i+1)$. Zatem $h = f$, czyli $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Niech teraz $g \in 4^{\mathbb{N}}$ i niech $j = \Phi(\Psi(g))$. Wtedy

$$j(k) = 2 \cdot (\Psi(g))(2k) + \Psi(g)(2k+1) = g(k),$$

co sprawdzamy analizując bezpośrednio wszystkie cztery przypadki $g(k) \in \{0,1,2,3\}$ i stosując definicję Ψ. Pokazuje to, że $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$, czyli $\Psi = \Phi^{-1}$. A zatem Φ zadaje bijekcję z $2^{\mathbb{N}}$ do $4^{\mathbb{N}}$.
Reasumując, pokazaliśmy, że $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}|$, $|3^{\mathbb{N}}| \leqslant |4^{\mathbb{N}}|$ oraz $|2^{\mathbb{N}}| = |4^{\mathbb{N}}|$, a stąd już wynika $|2^{\mathbb{N}}| = |3^{\mathbb{N}}|$.

Sposób III – uwzględnia fakty z ostatnich ćwiczeń

Tak. Na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina, wystarczy pokazać, że $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}|$ oraz $|2^{\mathbb{N}}| \geqslant |3^{\mathbb{N}}|$.

Skoro $\{0,1\} \subset \{0,1,2\} \subset \{0,1,2,3\}$ to $|2^{\mathbb{N}}| \leqslant |3^{\mathbb{N}}| \leqslant |4^{\mathbb{N}}|$. Zbiór $\{0,1,2,3\}$ jest w bijekcji z $\{0,1\}^2$. Zatem

$$|4^{\mathbb{N}}| = |\left(\{0,1\}^2\right)^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{2\times\mathbb{N}}|,$$

bo na ostatnich ćwiczeniach wykazaliśmy, że dla wszystkich zbiorów A, B, C mamy $|(A^B)^C| = |A^{B\times C}|$.

Wiemy, że $2 \times \mathbb{N} = \{0,1\} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Ponadto $\mathbb{N} \subset \{0,1\} \times \mathbb{N}$. Zatem $|\mathbb{N}| \leqslant |2 \times \mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Ale wykazaliśmy na ćwiczeniach, że $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \mathbb{N}$. Więc $|2 \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Na ostatnich ćwiczeniach wykazaliśmy, że jeśli zbiory B i C są takie, że $|B| = |C|$ to dla każdego zbioru A zachodzi $|A^B| = |A^C|$. Zatem

$$|\{0,1\}^{2\times\mathbb{N}}| = |\,\{0,1\}^{\mathbb{N}}\,| = |2^{\mathbb{N}}|.$$

Stąd $|3^{\mathbb{N}}| \leqslant |4^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$, a wcześniej pokazaliśmy $|3^{\mathbb{N}}| \geqslant |2^{\mathbb{N}}|$, więc $|3^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Zadanie 2

Rozstrzygnij, czy zbiory $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ oraz $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ są równoliczne.

Rozwiązanie.

Pokażemy najpierw, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^k|$. Na ćwiczeniach wykazaliśmy, że $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$, więc wystarczy pokazać, że

$$|(0,1)^k| = |(0,1)|.$$

Mamy funkcję różnowartościową $(0,1) \to (0,1)^k$, zadaną wzorem $r \mapsto (r,0,0,\ldots,0)$, więc $|(0,1)| \leqslant |(0,1)^k|$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wystarczy wykazać, że $|(0,1)^k| \leqslant |(0,1)|$, czyli znaleźć funkcję różnowartościową $(0,1)^k \to (0,1)$. Weźmy element $(r_0,\ldots,r_{k-1}) \in (0,1)^k$ i zapiszmy kolejne cyfry w zapisie dziesiętnym każdego r_i:

$$r_i = 0, a_{i,1}\, a_{i,2}\, a_{i,3}\, \ldots\, a_{i,n}\, \ldots$$

Funkcja $(0,1)^k \to (0,1)$ przypisuje elementowi $(r_0,\ldots,r_{k-1})$ liczbę $r \in (0,1)$ taką, że

$$r = 0, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots$$

gdzie

$$b_{qk+r} = a_{r,q} \text{ dla wszystkich } q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ oraz } r \in \{0,1,\ldots,k-1\}.$$

(*innymi słowy, rozwinięcie dziesiętne r to pewien splot rozwinięć dziesiętnych $(r_1,\ldots,r_k)$. Jeśli masz problem ze zrozumieniem tej części rozwiązania, rozważ przypadek $k = 2$.*). Funkcja ta jest injekcją, bo z b_n da się odczytać wszystkie $a_{i,j}$. Zatem $|(0,1)^k| \leqslant |(0,1)|$, co kończy dowód, że $|\mathbb{R}^k| = |\mathbb{R}|$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \quad \text{oraz} \quad S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$$

Mamy funkcję różnowartościową $C \to S$ zadaną wzorem $(x,y) \mapsto (x,y,0)$. Ponadto $S \subset \mathbb{R}^3$. Wreszcie, funkcja $s\colon [0,2\pi) \to C$ zadana wzorem $s(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ jest różnowartościowa. Otrzymujemy ciąg nierówności

$$|[0,2\pi)| \leqslant |C| \leqslant |S| \leqslant |\mathbb{R}^3|$$

Z rozumowania powyżej wiemy, że $|\mathbb{R}^3| = |\mathbb{R}|$. Z ćwiczeń wiemy, że $|[0,2\pi)| = |\mathbb{R}|$. Zatem $|\mathbb{R}| = |C| = |S|$.

Zadanie 3

Zbiór X składa się z ciągów nieskończonych $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$, gdzie $a_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, spełniających warunek

$$\forall_{n\geqslant 1} a_n = a_{n+2}.$$

Pokaż, że X jest przeliczalny.

Rozwiązanie.

Rozważmy funkcję $\varphi\colon X \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ zadaną wzorem $\varphi((a_n)) = (a_1, a_2)$. Funkcja ta jest bijekcją. Pozostaje więc pokazać, że zbiór $\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$ jest przeliczalny. To zrobiliśmy na ostatnich ćwiczeniach metodą „zygzaka", więc nie będę tego tu powtarzać.

Zadanie 4

Czy istnieje liczba całkowita nieujemna n taka, że zbiór $\{1,\ldots,n\}^{\mathbb{N}}$ jest przeliczalny?
Przeliczalny, czyli równoliczny z $\mathbb{N}$.

Rozwiązanie.

Takie n nie istnieje.
Dla $n = 0$ zbiór $\{1,\ldots,n\}$ jest pusty, więc również $\emptyset^{\mathbb{N}}$ jest pusty. Dla $n = 1$ zbiór $1^{\mathbb{N}}$ jest jednoelementowy. Dla $n \geqslant 2$ mamy $\{1,2\} \subset \{1,\ldots,n\}$, więc

$$|\{1,2\}^{\mathbb{N}}| \leqslant |\{1,\ldots,n\}^{\mathbb{N}}|$$

Na ćwiczeniach pokazywaliśmy, że $|\{1,2\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Gdyby zbiór $\{1,\ldots,n\}^{\mathbb{N}}$ był przeliczalny, to z powyższej nierówności wynikałoby $|\mathbb{R}| \leqslant |\mathbb{N}|$. Ale wiemy, że $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ oraz $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{R}|$, czyli z twierdzenia Cantora-Bernsteina mamy $|\mathbb{R}| \not\leqslant |\mathbb{N}|$.