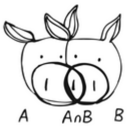

Zadania domowe II

WSTĘP DO MATEMATYKI
NA 13 LISTOPADA 2019

Zadanie 1
Niech A będzie zbiorem skończonym o a elementach zaś B będzie zbiorem skończonym o b elementach. W zależności od a i b znajdź liczbę funkcji z A do B:

1. wszystkich,
2. będących jednocześnie „na" oraz różnowartościowych.

Rozwiązanie.
Oznaczmy elementy zbioru A przez $x_1, x_2, \ldots, x_a$. Funkcję f z A do B można jednoznacznie określić przez podanie wartości $f(x_1) \in B$, $\ldots$, $f(x_a) \in B$. Zatem ta funkcja jest wyznaczona przez a-tkę elementów z B. Każdy taki element wybieramy na b sposobów, zatem funkcji jest b^a. *Stąd jest sugestywna notacja* B^A. Uwaga: uznajemy tu, że $0^0 = 1$.
Przejdźmy do funkcji różnowartościowych i „na", czyli bijekcji z A do B. Jeśli $a \neq b$ to takie bijekcje nie istnieją. Załóżmy zatem, że $a = b$. W tym przypadku każda funkcja różnowartościowa jest również na, więc wystarczy badać, na ile sposobów można wybrać funkcję różnowartościową. Jak poprzednio: wybór funkcji f to wybór elementów $f(x_1) \in B$, $\ldots$, $f(x_a) \in B$. Element $f(x_1)$ możemy wybrać na b sposobów. Element $f(x_2) \in B \setminus \{f(x_1)\}$ możemy wybrać na $b-1$ sposobów, $f(x_3) \in B \setminus \{f(x_1), f(x_2)\}$ możemy wybrać na $b-2$ itd. aż do $f(x_a) \in B \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_{a-1})\}$ który możemy wybrać na jeden sposób. Podsumowując, jeśli $a = b$ to bijekcji z A do B jest $b!$.

Zadanie 2
Dana jest pewna funkcja $f\colon A \to B$. Czy prawdą jest, że $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$?

Rozwiązanie.
Tak. Po pierwsze, $f^{-1}[B] = A$, więc $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A]$. Po drugie, $f[A] \subset B$, więc $f[A] \cap B = f[A]$. Zatem obie strony są równe $f[A]$.

Zadanie 3
Niech $\mathcal{A}$ będzie pewną niepustą rodziną zbiorów. Określamy funkcję $f\colon \mathcal{A} \to P(P(\bigcup \mathcal{A}))$ wzorem $f(X) := P(X)$. W zależności od $\mathcal{A}$ ustal, czy funkcja f jest różnowartościowa oraz rozstrzygnij czy jest ona „na".

Rozwiązanie.
To zadanie było omawiane na ćwiczeniach.

Zadanie 4
Dla $t \in \mathbb{N}$ definiujemy funkcję $f_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poprzez $f_t(x) = x^2 - 2tx + 1$. Niech $B_t = f_t^{-1}[(0, \infty)]$ dla $t \in \mathbb{N}$. Znajdź $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} B_t$ oraz $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} B_t$.

Rozwiązanie.
Po pierwsze, jeśli $x \in \mathbb{R}$ spełnia $x \leqslant 0$, to $-tx \geqslant 0$, więc $x^2 - 2tx \geqslant 0$, a zatem $f_t(x) > 0$ dla każdego $t \in \mathbb{N}$. Tym samym

$$\mathbb{R}_{\leqslant 0} \subset \bigcap_{t \in \mathbb{N}} B_t \subset \bigcup_{t \in \mathbb{N}} B_t.$$

Weźmy $x > 0$. Istnieje wtedy liczba naturalna n_x większa od x oraz od $1/x$. Mamy $f_{n_x}(x) = x^2 - 2n_x x + 1 = x^2 - n_x x + 1 - n_x x < x^2 - x \cdot x + 1 - 1/x \cdot x = 0$, więc $x \notin B_{n_x}$. Zatem

$$\bigcap_{t \in \mathbb{N}} B_t = \mathbb{R}_{\leqslant 0}.$$

Wreszcie, $f_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, czyli $B_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \geqslant 0\right\} = \mathbb{R}$. Zatem

$$\bigcup_{t \in \mathbb{N}} B_t = \mathbb{R}.$$