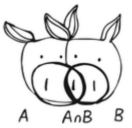

Zadania domowe I

WSTĘP DO MATEMATYKI
NA 23 PAŹDZIERNIKA 2019

Zadanie 1
Rozstrzygnij, czy formuła

$$(p \vee q \vee (q \implies p)) \iff (p \vee q \vee (\neg p \implies q))$$

jest tautologią. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.
Krótka odpowiedź: Nie. Dla $p = q = 0$ prawa strona jest nieprawdziwa, zaś lewa jest prawdziwa.

Dłuższa odpowiedź: Nie. Zauważmy, że $(p \vee q \vee (q \implies p)) = p \vee q \vee (\neg q) \vee p = p \vee (q \vee \neg q)$ jest tautologią. Natomiast formuła $(p \vee q \vee (\neg p \implies q)) = p \vee q \vee p \vee q = p \vee q$ nie jest tautologią, bo nie jest prawdziwa dla $p = q = 0$.

Zadanie 2
Rozstrzygnij, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C).$$

Podaj dowód lub kontrprzykład.

Rozwiązanie.
Niech $A = B = C = \{1\}$. Wtedy $A \cup (B \setminus C) = A \cup \emptyset = A$, zaś $A \cup B = A$ i $B \cap C = A$, zatem $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \setminus A = \emptyset$. Zatem w tym szczególnym przypadku nasza równość redukuje się do $A = \emptyset$ co nie jest prawdą.

Zadanie 3
Czy dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.
Z definicji

$$P(A) \cap P(B) = \{X : X \subset A\} \cap \{X : X \subset B\} = \{X : X \subset A \cap B\} = P(A \cap B).$$

Zatem podana równość jest prawdziwa.

Zadanie 4
Wykaż, że wśród dowolnych $2^{n-1} + 1$ podzbiorów zbioru n elementowego ($n \geqslant 1$) istnieją dwa zbiory rozłączne.

Rozwiązanie.
Oznaczmy zbiór n-elementowy z zadania przez X, zaś rodzinę jego podzbiorów przez $\mathcal{F} \subset P(X)$. Zatem $|\mathcal{F}| = 2^{n-1} + 1$.
Niech $\mathcal{G} = \{\{A, X \setminus A\} : A \subset X\}$ będzie zbiorem par nieuporządkowanych: zbiór i dopełnienie. Każdy podzbiór X należy do dokładnie jednej pary, więc $|\mathcal{G}| = 2^{n-1}$.
Rozważmy odwzorowanie

$$f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

takie, że $f(X) = \{A, X \setminus A\}$. Skoro $|\mathcal{G}| < |\mathcal{F}|$, to istnieją dwa różne $A, B \in \mathcal{F}$ takie, że $f(A) = f(B)$. Ale wtedy $B = X \setminus A$, więc w szczególności $A \cap B = \emptyset$. Elementy $A, B \in \mathcal{F}$ są szukanymi podzbiorami.