Powtórzenie i równoliczność

WSTĘP DO MATEMATYKI
4 GRUDNIA 2019

Zadanie 1
Rozstrzygnij, czy formuła $(p \implies \neg q) \vee (q \implies \neg p)$ jest tautologią.

Zadanie 2
Znajdź $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in\mathbb{R}_{>0}} A_t$, gdzie $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ są określone wzorem

1. $A_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant t^2\right\}$,
2. $A_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geqslant t^2\right\}$.

Zadanie 3
Czy zbiór A jest funkcją, gdy A jest zadane jako

1. $A = \left\{(V, (a_1, a_2)) \in P(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^2 :\ V \text{ podprzestrzeń liniowa wymiaru 2 oraz } a_1, a_2 \text{ baza przestrzeni } V\right\}$.
2. $A = \left\{((a_1, a_2), V) \in \mathbb{R}^2 \times P(\mathbb{R}^3) :\ V \text{ podprzestrzeń liniowa wymiaru 2 oraz } a_1, a_2 \text{ baza przestrzeni } V\right\}$,

Jeśli których z powyższych zbiorów jest funkcją, czy jest ona różnowartościowa? Czy jest ona NA?

Zadanie 4
Jaka jest moc zbioru $\left\{n^3 + 1\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}$? Jaka jest moc zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$?

Zadanie 5

1. Niech B będzie zbiorem takim, że jego podzbiory $A_1, A_2 \subset B$ są przeliczalne. Pokaż, że $A_1 \cup A_2$ także jest przeliczalny.
2. Niech B będzie zbiorem takim, że jego podzbiory, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są przeliczalne. Pokaż, że zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ także jest przeliczalny.

Zadanie 6
Czy zbiór $\left\{\sqrt[n]{q} :\ q \in \mathbb{Q}_+, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}\right\} \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalny?

Zadanie 7
Dany jest ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_i \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ taka, że

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{m\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} (m < k \implies f_n(k) < g(k)).$$

Wskazówka: najpierw przeczytaj zadanie trzy razy.