



Równoliczność

WSTĘP DO MATEMATYKI
27 LISTOPADA 2019

ZADANIE 1

Ustalmy macierz kwadratową A rozmiaru n , o wyrazach rzeczywistych. Jaka może być moc zbioru $R_b := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$?

ZADANIE 2

Zbiory A i B są rozłączne. Rozstrzygnij, który ze zbiorów $2^A \times 2^B$ oraz $2^{A \cup B}$ ma większą moc.

ZADANIE 3

Założmy, że zbiory A, A', B, B' są takie, że $|A| \leq |A'|$ oraz $|B| \leq |B'|$. Czy zawsze prawdą jest, że

1. $|2^A| \leq |2^{A'}|$?
2. $|A \times B| \leq |A' \times B'|$?
3. $|A \cup B| \leq |A \times B|$?
4. $|A^B| \leq |A'^{B'}|$?

ZADANIE 4

Dany jest ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $f_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} (m < k \implies f_n(k) < g(k)).$$

Wskazówka: najpierw przeczytaj zadanie trzy razy.

ZADANIE 5

Znajdź moc zbioru $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

ZADANIE 6

Zbiory $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są przeliczalne. Pokaż, że zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ także jest przeliczalny.

ZADANIE 7

Czy istnieje bijekcja z \mathbb{Q} do \mathbb{N} ?

ZADANIE 8

Czy zbiór wszystkich punktów \mathbb{R}^2 o obu współrzędnych całkowitych jest przeliczalny?

ZADANIE 9

Pokaż, że zbiór $\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Q} (x^2 + px + q = 0)\}$ jest przeliczalny.