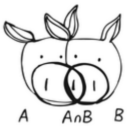

Tnij waść!

WSTĘP DO MATEMATYKI — SUMY I PRZECIĘCIA ZBIORÓW
23 PAŹDZIERNIKA 2019

Zadanie 1
Czy dla każdej rodziny zbiorów A zachodzi $A \subset P(\bigcup A)$?

Zadanie 2
Niech $A_n = (-n, n) \subset \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Czy prawdą jest, że $\mathbb{Z} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$? Czy prawdą jest, że $\forall_{k \in \mathbb{N}} A_{2k} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$?

Zadanie 3
Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie ciąg zbiorów A_n jest określony następująco

1. $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant n\}$
2. $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -p_n \leqslant x \leqslant p_n\}$,
   p_n to n-ta liczba pierwsza, np. $p_1 = 2$.
3. $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant n\right\}$.
4. $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 2^n < x < n^2 + 100\right\}$.

Zadanie 4
Które z poniższych zdań są prawdziwe?

1. Jeśli A_n, $(n \in \mathbb{N})$ to dowolne zbiory takie, że $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} A_n \cap A_m \neq \emptyset$ to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.
2. Jeśli A_n, $(n \in \mathbb{N})$ to dowolne zbiory takie, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$ to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.
3. Jeśli A_n, $(n \in \mathbb{N})$ to dowolne zbiory takie, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$ oraz $\forall_{n \in \mathbb{N}} A_{n+1} \subset A_n$ to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Uwaga: w tym zadaniu $0 \in \mathbb{N}$.

Zadanie 5
Niech funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \cos(x)$. Wyznacz

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n],$$

gdzie $A_n = (n-3, n+4)$.
Uwaga: x jest tutaj liczony w radianach tzn. 360° odpowiada 2π, np. $f(\pi/3) = \cos(60^\circ) = 1/2$. Ponadto $f[A] := \{f(a) : a \in A\}$.

Zadanie 6
Dla $q \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}$ definiujemy zbiór $A_{q,r} = \{x \in \mathbb{R} : |x - q| < r\}$. Wyznacz zbiory

1. $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \bigcup_{r>0} A_{q,r}$,
2. $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{r>0} A_{q,r}$,
3. $\bigcup_{r>0} \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,r}$.