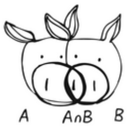

Porządki częściowe i Kuratowski-Zorn

WSTĘP DO MATEMATYKI
22 STYCZNIA 2020

ZADANIE 1
Niech $A = \{1, 2, \dots, 2020\}$ będzie uporządkowany przez relację $\leqslant_{div}$, gdzie $\forall_{a,b \in A} a \leqslant_{div} b \iff a$ dzieli b. Znajdź największą długość łańcucha i antyłańcucha w A.

Twierdzenie 1 (Cantor). *Niech $(A, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli*

1. *porządek $\preceq$ jest liniowy,*
2. *A jest przeliczalny,*
3. *porządek na A jest gęsty,*
4. *nie istnieje element największy ani najmniejszy na A,*

to $(A, \preceq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

ZADANIE 2
Które z następujących zbiorów liniowo uporządkowanych są izomorficzne z $(\mathbb{Q}, \leqslant)$?

1. $(\mathbb{Q} \cap (22, 2020), \leqslant)$,
2. $(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}, \leqslant_{lex})$,

ZADANIE 3
Dla każdego z czterech założeń twierdzenia Cantora podaj przykład zbioru $(A, \preceq)$ który spełnia jedynie trzy pozostałe założenia.

ZADANIE 4
Rozstrzygnij, czy zbiory liniowo uporządkowane $\mathbb{Q} \cap ((0,1] \cup \{2\} \cup (4,5))$ oraz $\mathbb{Q} \cap ((0,1) \cup \{2,3\} \cup (4,5)))$ są izomorficzne.

ZADANIE 5
Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich przeliczalnych i nieograniczonych z góry podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$. Niech $\leqslant$ oznacza zwykły porządek na $\mathbb{R}$. Wtedy

1. rodzina $\mathcal{F}$ jest mocy większej niż continuum,
2. istnieje $B \in \mathcal{F}$ taki, że $(B, \leqslant)$ nie jest izomorficzny z $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ ale zawiera podzbiór $B' \subset B$ taki, że $(B', \leqslant)$ jest izomorficzny z $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

ZADANIE 6
Udowodnij, że istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ o następujących własnościach:

1. żadne trzy różne punkty zbioru nie są współliniowe,
2. każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2$ leży na prostej przechodzącej przez dwa różne punkty zbioru A.

Innymi słowy, zbiór A ma tę własność, że każdy punkt $\mathbb{R}^2$ leży na dokładnie jednej prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty zbioru A.

ZADANIE 7
Niech X będzie zbiorem, zaś $\mathcal{F} \subset P(X)$ będzie rodziną podzbiorów o tej własności, że jeśli $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ są elementami $\mathcal{F}$ oraz $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ także jest elementem $\mathcal{F}$. Pokaż, że $\mathcal{F}$ ma element maksymalny ze względu na inkluzję.