Porządki częściowe

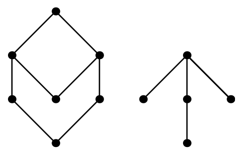
WSTĘP DO MATEMATYKI
15 STYCZNIA 2020

Zadanie 1
Niech $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$. Narysuj diagram Hassego zbioru A, wskaż elementy minimalne, maksymalne oraz największy/najmniejszy o ile istnieją, gdy porządek jest określony przez

1. naturalny porządek na liczbach naturalnych,
2. $a \preceq b \iff (a \text{ dzieli } b)$.

Zadanie 2

Znajdź zbiór $X \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ częściowo uporządkowany przez relację podzielności i taki, że diagram Hassego X jest przedstawiony obok.



Zadanie 3
Porządkujemy podzbiory $\mathbb{N}$ relacją $A \preceq B \iff A \subset B$. Nazywamy to *porządkiem przez inkluzję* (z łac. *inclusio* tzn. zawierać).
Rozważmy następujące własności rodziny $X \subset P(\mathbb{N})$ uporządkowanej przez inkluzję:

1. X posiada element maksymalny,
2. X posiada 2019 elementów maksymalnych,
3. X posiada element największy,
4. X posiada element najmniejszy,
5. X posiada 2019 elementów minimalnych,
6. X posiada element minimalny,

Czy istnieje zbiór X spełniający wszystkie te własności? Czy istnieje zbiór X spełniający dokładnie cztery z nich? Czy istnieje zbiór X niespełniający żadnej z nich?

Jeśli zbiory $(A, \preceq_A)$ i $(B, \preceq_B)$ są uporządkowane, to *porządek leksykograficzny* na $A \times B$ jest zdefiniowany poprzez $((a, b) \preceq (a', b')) \iff (a \prec a' \vee (a = a' \wedge (b \preceq b')))$.

Zadanie 4
Rozstrzygnij, które z następujących par zbiorów są izomorficzne. Wszystkie podzbiory poniżej są z naturalnym porządkiem na liczbach rzeczywistych:

1. $\mathbb{N}$ i $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq_{lex})$,
2. $(\mathbb{R} \times \mathbb{N}, \preceq_{lex})$ i $(\mathbb{N} \times \mathbb{R}, \preceq_{lex})$.

Porządek nazywamy *liniowym* jeśli dowolne dwa elementy są porównywalne. Porządek na zbiorze A ($|A| \leqslant 2$) nazywamy *gęstym* jeśli dla każdych $a < a' \in A$ istnieje $a'' \in A$ taki, że $a < a'' < a'$.

Zadanie 5
Pokaż, że jeśli $(A, \leqslant)$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo oraz a jest elementem maksymalnym, to a jest największy. Czy zbiór uporządkowany liniowo musi mieć element maksymalny?

Zadanie 6
Niech $(A, \preceq)$ będzie zbiorem przeliczalnym uporządkowanym liniowo. Pokaż, że istnieje podzbiór $Z \subset \mathbb{Q}$ taki, że $(Z, \leqslant) \simeq (A, \preceq)$.

Twierdzenie 1 (Cantor)**.** *Niech $(A, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli*

1. *porządek $\preceq$ jest liniowy,*
2. *A jest przeliczalny,*
3. *porządek na A jest gęsty,*
4. *nie istnieje element największy ani najmniejszy na A,*

to $(A, \preceq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

Zadanie 7
Dla każdego z czterech założeń twierdzenia Cantora podaj przykład zbioru $(A, \preceq)$ który spełnia jedynie trzy pozostałe założenia.