Relacje ciąg dalszy

WSTĘP DO MATEMATYKI
8 STYCZNIA 2020

ZADANIE 1 UDANEGO NOWEGO ROKU!
Czy następujące relacje na zbiorze $\mathbb{N}^{2020}$ są relacjami równoważności:

1. $(a_1, \ldots, a_{2020}) \equiv (b_1, \ldots, b_{2020})$ jeśli wyraz występujący w tych ciągach najczęściej występuje w nich tyle samo razy?
2. $(a_1, \ldots, a_{2020}) \equiv (b_1, \ldots, b_{2020})$ jeśli istnieje wyraz występujący w tych ciągach tyle samo razy?

ZADANIE 2
Znajdź wszystkie relacje równoważności na zbiorze n-elementowym mające

1. dokładnie dwie klasy abstrakcji,
2. dokładnie $n-1$ klas abstrakcji.

ZADANIE 3
Relacja $\simeq$ jest relacją równoważności na zbiorze A taką, że wszystkie klasy abstrakcji $\simeq$ są przeliczalne. Które z poniższych implikacji są zawsze prawdziwe?

1. zbiór ilorazowy $A/\equiv$ jest przeliczalny.
2. zbiór A jest przeliczalny.

ZADANIE 4
W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określamy relację równoważności $\equiv$ poprzez

$$f \equiv g \iff \forall_{n \geqslant 101} f(n) = g(n).$$

1. Niech funkcja $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zadana wzorem $f(n) = 2n^2 + 1$. Znajdź moc zbioru $[f]_{\equiv}$.
2. Czy istnieje $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że $|[g]_{\equiv}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\equiv|$?

ZADANIE 5
Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wprowadzamy relację $\equiv$ poprzez

$$f \equiv g \iff |\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) \neq g(n)\}| < \infty$$

Udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i że każda klasa abstrakcji jest przeliczalna.

ZADANIE 6
Na zbiorze $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ wprowadzamy relację równoważności $\equiv$ poprzez

$$A \equiv B \iff (|A| = |B| \wedge pr_1[A] = pr_1[B]),$$

gdzie $pr_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną, czyli $pr_1(x, y) = x$.

1. Znajdź moc klasy abstrakcji $[\{1\} \times \mathbb{N}]_{\equiv}$.
2. Uzasadnij, że jeśli $C \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest zbiorem dwuelementowym, to klasa abstrakcji $[C]_{\equiv}$ jest równoliczna z $\mathbb{N}$.

ZADANIE 7
Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ wprowadzamy relację $\equiv$ poprzez $A \equiv B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \Delta B$ jest zbiorem skończonym (przypominam: $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$). Pokaż, że dla każdego $A \subset \mathbb{N}$ mamy

$$[A]_{\equiv} = \{A \Delta S \ : \ S \subset \mathbb{N} \text{ podzbiór skończony}\}.$$

ZADANIE 8
Czy istnieje funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $r \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(r)$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$? Czy istnieje relacja równoważności $\simeq$ na $\mathbb{R}$ taka, że każda z jej klas abstrakcji jest mocy continuum?