Zbiory i relacje

WSTĘP DO MATEMATYKI
18 GRUDNIA 2019

ZADANIE 1
Pokaż, że dowolna rodzina złożona z rozłącznych przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ jest przeliczalna. Czy dowolna rodzina złożona z przedziałów w $\mathbb{R}$ jest przeliczalna?
Wskazówka: wspomnij na pracę domową!

ZADANIE 2
Pokaż, że wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalnie wiele.

ZADANIE 3
Udowodnij, że następujące zbiory są mocy continuum:

1. $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \ : \ f \text{ jest bijekcją}\}$,
2. $\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \ : \ f \text{ jest bijekcją}\}$,
3. $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Q}} \ : \ f \text{ jest różnowartościowa}\}$.

ZADANIE 4
Relacja r jest zadana na $\mathbb{Q}$ wzorem $\forall_{a,b\in\mathbb{Q}}(a \ r \ b \iff a \leqslant b)$. Czy ta relacja jest zwrotna? Symetryczna? Antysymetryczna? Przechodnia? Czy jest relacją równoważności?

ZADANIE 5
Zdefiniujmy na $P(\mathbb{N})$ relację r wzorem $A \ r \ B \iff |A| = |B|$. Czy relacja r jest relacją równoważności? Jakie są klasy abstrakcji?

ZADANIE 6
Niech $\equiv$ będzie pewną relacją równoważności na $\mathbb{N}$. Powiedz, które z poniższych są prawdziwe:

1. Jeśli $\equiv$ ma skończenie wiele klas abstrakcji, to każda jedna klasa abstrakcji $\equiv$ jest nieskończona.
2. Jeśli $\equiv$ ma skończenie wiele klas abstrakcji, to przynajmniej jedna klasa abstrakcji $\equiv$ jest nieskończona.
3. Jeśli $\equiv$ ma dwie klasy abstrakcji to dokładnie jedna z nich jest nieskończona.

ZADANIE 7
Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wprowadzamy relację $\equiv$ poprzez

$$f \equiv g \iff |\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) \neq g(n)\}| < \infty$$

Udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i że każda klasa abstrakcji jest przeliczalna.

ZADANIE 8
Na zbiorze $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ wprowadzamy relację równoważności $\equiv$ poprzez

$$A \equiv B \iff (|A| = |B| \wedge pr_1[A] = pr_1[B]),$$

gdzie $pr_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną, czyli $pr_1(x, y) = x$.

1. Znajdź moc klasy abstrakcji $[\{1\} \times \mathbb{N}]_{\equiv}$.
2. Uzasadnij, że jeśli $C \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest zbiorem dwuelementowym, to klasa abstrakcji $[C]_{\equiv}$ jest równoliczna z $\mathbb{N}$.