



# Zbiory przeliczalne

WSTĘP DO MATEMATYKI  
11 GRUDNIA 2019

## ZADANIE 1

Zbiór  $A$  jest podzbiorem liczb wymiernych. Jaka może być jego moc?

## ZADANIE 2

Zbiór  $B$  jest podzbiorem zbioru punktów kratowych na płaszczyźnie. Jaka może być jego moc?

## ZADANIE 3 KLUCZOWE ZADANIE I

1. Niech  $B$  będzie zbiorem takim, że jego podzbiory  $A_1, A_2 \subset B$  są przeliczalne. Pokaż, że  $A_1 \cup A_2$  także jest przeliczalny.
2. Niech  $B$  będzie zbiorem takim, że jego podzbiory,  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  są przeliczalne. Pokaż, że zbiór  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  także jest przeliczalny.
3. Niech  $f: A \rightarrow B$  będzie funkcją. Załóżmy, że  $B$  jest przeliczalny oraz dla każdego  $b \in B$  zbiór  $f^{-1}(b)$  jest przeliczalny. Pokaż, że  $A$  jest przeliczalny.

## ZADANIE 4

Które z poniższych zdań są prawdziwe?

1.  $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$ ,
2.  $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}|$ ,

## ZADANIE 5

Czy zbiór  $\{\sqrt[n]{q} : q \in \mathbb{Q}_+, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \subset \mathbb{R}$  jest przeliczalny?

## ZADANIE 6

Pokaż, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. Uwaga: liczbę rzeczywistą  $\alpha$  nazywamy *algebraiczną* jeśli istnieje wielomian  $f$  o współczynnikach wymiernych taki, że  $f(\alpha) = 0$ .

## ZADANIE 7

Uzasadnij, że każdy niepusty przedział otwarty zawiera liczbę niealgebraiczną.

## ZADANIE 8

Udowodnij, że zbiór  $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \in \mathbb{Q}\}$  jest przeliczalny.

## ZADANIE 9 KLUCZOWE ZADANIE II

Pokaż, że dowolna rodzina niepustych parami rozłącznych podzbiorów zbioru przeliczalnego jest przeliczalna.

## ZADANIE 10

Pokaż, że dowolna rodzina złożona z rozłącznych przedziałów otwartych w  $\mathbb{R}$  jest przeliczalna. Czy dowolna rodzina złożona z przedziałów w  $\mathbb{R}$  jest przeliczalna?

## ZADANIE 11

Rozstrzygnij, czy zbiór

$$\{(x_0, \dots, x_{2019}) \in \mathbb{R}^{2015} : \forall_{k \in \{0, \dots, 2019\}} (x_k \neq 0) \wedge \forall_{k, n \in \{0, \dots, 2019\}} (k \neq n \implies x_k x_n \in \mathbb{Q})\}$$

jest przeliczalny.

## ZADANIE 12

Zbiory  $X$  i  $Y$  są takie, że  $Y^X$  jest przeliczalny. Uzasadnij, że  $X$  jest niepusty skończony zaś  $Y$  jest przeliczalny.