SZKIC

$\lambda = \{m_i\}_{i=1}^{d}$

VI.4. Mamy $B = \frac{A[x_1 \dots x_n]}{I}$. Z założenia, $\phi : \lambda \otimes_{\mathbb{Z}} A \to B$ jest izomorfizmem.

Wobec tego dla każdego jednomianu $\mu \in \mathbb{Z}[x_1 \dots x_n]$, jego obraz w B jest równy obrazowi przez Φ jedynego elementu z $\lambda \otimes A$, zatem I zawiera element

$$\mu - \sum_{i=1}^{d} a_i m_i. \qquad (*)$$

Niech J będzie ideałem generowanym przez te elementy, wtedy $J \subseteq I$.

A-moduł $\frac{A[x_1 \dots x_n]}{J}$ jest rozpinany przez λ, co wynika bezpośrednio z $(*)$

Mamy więc

$$\begin{tikzcd} \frac{A[x_1 \dots x_n]}{J} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \frac{A[x_1 \dots x_n]}{I} \\ & \lambda \otimes A \arrow[ul] \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

i stąd wynika, że surjekcja π jest izomorfizmem, czyli $I = J$, czyli I jest gen. przez elementy z $(*)$.

Uwaga: niech $\Sigma = \{m \in S \setminus \lambda \mid m \notin S_+ \cdot (S \setminus \lambda)\}$ wtedy elementy $(*)$ dla Σ generują J, bo jeśli $\mu \in S \setminus \lambda \setminus \Sigma$ to $\mu \in S_+(S \setminus \lambda)$ i pewien jego dzielnik jest w Σ.

VI.5. Ten podpunkt to bardzo wysublimowana forma dzielenia z resztą. Patrz przykład.

Z poprzedniego podpunktu, $H^{\lambda}(A) = \{ \operatorname{Spec}\left(\frac{A[x_1 \dots x_n]}{I}\right) \mid I$ ideał gen. przez $\mu - \sum a_i^{\mu} m_i$, $\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \frac{A[x_1 \dots x_n]}{I}$ izo $\}$

$=$

$\{ \operatorname{Spec}\left(\frac{A[x_1 \dots x_n]}{I}\right) \mid I$ ideał, I jako A-moduł gen. przez elementy postaci $\{\mu - \sum a_i^{\mu} m_i\}_{\mu}$ jednomian spoza λ. $a_i^{\mu} \in A$

Zatem mamy odwzorowanie $H^{\lambda}(A) \xrightarrow{i} A^{\infty} = \operatorname{Spec} \mathbb{k}[x_i^{\mu}]$ które przyporządkowuje ideałowi I elementy a_i^{μ}

Chcemy pokazać, że i jest domkniętym włożeniem.

To jest dość podobne do argumentu o BasedAlgs z wykładu.

Weźmy

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(A) \arrow[d, "\varphi"] \\ H^{\lambda}(A) \arrow[r] & A^{\infty} \end{tikzcd}$$

Wtedy φ odpowiada morfizmowi $\mathbb{k}[x_i^{\mu}] \to A$, czyli krotce $[a_i^{\mu}]$.

Kiedy A-moduł $M = A\{\mu - \sum a_i^{\mu} m_i\} \subseteq A[x_1 \dots x_n]$ jest ideałem?

Dokładnie gdy $\forall \ell \quad x_\ell M \subseteq M$. Pozostaje zrozumieć, co to znaczy explicite

Mamy $x_\ell(\mu - \sum a_i^{\mu} m_i) = x_\ell \mu - \sum_{i=1}^{d} a_i^{\mu}(x_\ell m_i)$

załóżmy, że $x_\ell m_i \in \lambda$ dla $k \leq i \leq e$ i $x_\ell m_i \notin \lambda$ dla $i > e$.
Zapiszmy $\mu^i = x_\ell m_i \quad i > e$.

Wtedy $x_\ell \mu - \sum_{i=1}^{d} a_i^{\mu}(x_\ell m_i) = x_\ell \mu - \sum_{i=1}^{e} a_i^{\mu}(x_\ell m_i) - \sum_{i=e+1}^{d} a_i^{\mu}(x_\ell m_i) =$

$(*) \qquad x_\ell \mu - \sum_{i=1}^{e} a_i^{\mu}(x_\ell m_i) - \sum_{i=e+1}^{d} a_i^{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_i^{\mu^i} m_i\right).$

jednomiany z λ

Rozważmy dwa przypadki:

① Jeśli $\underbrace{x_\ell \mu}_{m_s} \in \lambda$ to $(*)$ jest kombinacją liniową jednomianów z λ, która musi być równa 0 jeśli I jest ideałem, bo $I \cap \lambda \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0$.
To daje równania kwadratowe w $[a_i^{\mu}]$

② Jeśli $x_\ell \mu \notin \lambda$ to w I istnieje element $x_\ell \mu - \sum a_i^{x_\ell \mu} m_i$ i musi być równy $(*) = x_\ell \mu - \sum a_i^{x_\ell \mu} m_i$ którą można wyrazić jako równania kwadratowe w $[a_i^{\mu}]$.

Przykład: $\lambda = \{1, x\} \subset \mathbb{Z}[x, y]$. Wtedy rozważamy m.in. elementy

$x^2 - a_1^{x^2} - a_2^{x^2} x$
$x^3 - a_1^{x^3} - a_2^{x^3} x$
$y - a_1^{y} - a_2^{y} x$

$x(x^2 - a_1^{x^2} - a_2^{x^2} x) =$
$x^3 - a_1^{x^2} x - a_2^{x^2} x^2 =$
$x^3 - a_1^{x^2} x - a_2^{x^2} a_1^{x^2} - (a_2^{x^2})^2 x$

i ten element musi być równy
$x^3 - a_1^{x^3} - a_2^{x^3} x$.

To znaczy, że $a_1^{x^3} = a_2^{x^2} a_1^{x^2}$ i $a_2^{x^3} = (a_2^{x^2})^2$.

Podobnie,

$x(y - a_1^{y} - a_2^{y} x) = xy - a_1^{y} x - a_2^{y}(a_1^{x^2} + a_2^{x^2} x)$

i to musi być równe $xy - a_1^{xy} x - a_2^{xy} x$ czyli

$a_1^{xy} = a_2^{y} a_1^{x^2}$ i $a_2^{xy} = a_1^{y} + a_2^{y} a_2^{x^2}$.