Teoria deformacji
IX seria zadań (na poniedziałek 27.04, wersja 1.01)

Zadanie 1 Uzupełnienia z algebry przemiennej

1. Niech $(A, \mathfrak{m})$ będzie Noetherowskim pierścieniem lokalnym takim, że uzupełnienie $\hat{A}$ w ideale maksymalnym jest dziedziną. Pokaż, że A jest dziedziną.
   Uwaga: możesz przyjąć za znane twierdzenie Krulla o przecięciu [A-M, 10.20], które mówi, że $\bigcap_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}^n = 0$.

2. Niech $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$. Pokaż, że A jest dziedziną, lecz $\hat{A}$ nie jest dziedziną. Tutaj $\hat{A}$ oznacza uzupełnienie A w ideale maksymalnym (x, y).
   Wskazówka: pierścień A używa też pseudonimu „krzywa nodalna”.

Zadanie 2

1. Niech C będzie całkowitą krzywą normalną nad ciałem algebraicznie domkniętym $\Bbbk$. Pokaż, że C jest gładka.
   Nie będziemy dowodzić tego, ale rozmaitości gładkie są zawsze normalne bo pierścienie regularne są UFD.

2. Pokaż, że jeśli A jest normalną dziedziną, a G jest grupą skończoną działającą na A, to A^G także jest normalna.

3. Pokaż, że $\Bbbk[x^2, xy, y^2]$ jest normalną dziedziną, która nie jest gładka. Jaki jest jej wymiar?

Zadanie 3
Niech X będzie schematem skończonego typu nad ciałem $\Bbbk$ takim, że $\Omega_{X/\Bbbk} = 0$. (takie schematy nazywamy *nierozgałęzionymi*, ang. unramified). Pokaż, że przestrzeń $|X|$ jest skończona i wywnioskuj, że X jest afiniczny i zero-wymiarowy.

Zadanie 4 Ciąg konormalny
Niech $X \subset Y$ będzie domkniętym podschematem schematu Y skończonego typu nad ciałem $\Bbbk$. Pokaż, że mamy ciąg dokładny snopów koherentnych
$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \to \Omega_{Y/\Bbbk}|_X \to \Omega_{X/\Bbbk} \to 0,$$
gdzie $\mathcal{I}$ jest snopem ideałów $X \subset Y$ odwzorowanie lewe lokalnie przyporządkowuje klasie elementu i różniczkę $d(i)$.
Wskazówka: wszystko można policzyć lokalnie.

Zadanie 5 Naiwny funktor Picarda
Niech X będzie ustalonym $\Bbbk$-schematem, gdzie $\Bbbk$ jest pierścieniem. Niech $\operatorname{Pic}_X(-)\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ przyporządkowuje schematowi T grupę Picarda klas izomorfizmu snopów odwracalnych na $X \times_{\Bbbk} T$.

1. Pokaż, że dla każdego $\Bbbk$-schematu X schemat Pic_X nie jest snopem Zariskiego.

   Wskazówka: Niech U_0, U_1 będzie standardowym pokryciem afinicznym $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$. Niech $L = \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}(1)$, gdzie $\mathrm{pr}_2\colon X \times_{\Bbbk} \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \to \mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ jest rzutowaniem. Przeanalizuj element $[\mathcal{O}(1)] \in \operatorname{Pic}_X(\mathbb{P}^1_{\Bbbk})$ i jego obcięcia do $X \times U_i$. Slogan: wiązki są lokalnie trywialne, ale nie globalnie trywialne.

2. Niech $[L] \in \operatorname{Pic}_X(\Bbbk)$ i niech $[\widetilde{L}] \in \operatorname{Pic}_X(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ przechodzi na $[L]$ przy naturalnym odwzorowaniu $\operatorname{Pic}_X(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2) \to \operatorname{Pic}_X(\Bbbk)$. Przyporządkowujemy jej element $H^1(\mathcal{O}_X)$ w następujący sposób: na pokryciu trywializującym $\widetilde{L}$ funkcje przejścia to $\alpha_{ij} + \varepsilon f_{ij} \in H^0(U_{ij}, \mathcal{O}^*_{X[\varepsilon]})$. Sprawdź, że $(f_{ij}\alpha_{ij}^{-1}) \in H^0(U_{ij}, \mathcal{O}_X)$ spełnia warunek kocyklu. Sprawdź, że to przyporządkowanie nie zależy od wyboru trywializacji. *Wskazówka: przez rozdrobnienie możesz założyć, że mamy dwie trywializacje na tych samych otwartych. Sprawdź bezpośrednio.*

3. [Zadanie dodatkowe] Pokaż, że zdefiniowane powyżej odwzorowanie indukuje bijekcję $T_{[L]} \operatorname{Pic}_X \to H^1(\mathcal{O}_X)$.
   Uwaga: nie musisz sprawdzać aksjomatów gwarantujących istnienie przestrzeni stycznej.

Adnotacja: na wykładzie mówiłem, że jednym z ćwiczeń domowych będzie pokazanie, że snopy $\mathcal{H}om$ dobrze się cofają. To sprowadza się do algebraicznego stwierdzenia, że $\operatorname{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \simeq \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$ gdy M, N są płaskimi A-modułami. To niewinne algebraiczne stwierdzenie wydaje się być dość techniczne do udowodnienia, bo nie mamy założenia, że B jest płaski nad A. Zatem zadanie na razie przekładamy, przynajmniej do momentu gdy uwierzę, że nie ma łatwego dowodu (niestety, dziś spędziłem na jego poszukiwaniu parę bezowocnych godzin, gdyby ktoś wiedział, jak to szybko zrobić, proszę o informację).