Teoria deformacji
VIII seria zadań (na poniedziałek 20.04, wersja 1.01)

Zadanie 1 HIPERPOWIERZCHNIE
Ustalmy $S = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$ oraz $d \geqslant 1$. Niech $0 \neq F \in S_d$, a $Z = (F = 0) \subset \mathbb{P}^n_{\Bbbk} := \operatorname{Proj} S$.

1. Pokaż, że $\mathcal{I}_Z \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\Bbbk}}(-d)$.
2. Oblicz wielomian Hilberta Z i pokaż, że nie zależy on od wyboru F.
3. Oblicz wymiar przestrzeni stycznej do schematu Hilberta w punkcie odpowiadającym Z.

Zadanie 2 GRUPA PICARDA
Niech X będzie schematem, zaś L snopem odwracalnym na X. Niech $L^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$. W tym zadaniu $\otimes := \otimes_{\mathcal{O}_X}$.

1. Pokaż, że odwzorowanie (jakie?) $L \otimes L^\vee \to \mathcal{O}_X$ jest izomorfizmem. Wywnioskuj, że $(L^\vee)^\vee \simeq L$.
   Sprawdź na pokryciu otwartym. Czy Twój dowód nie pokazuje, że $L^\vee \simeq L$?
2. Pokaż, że $(L \otimes M)^\vee \simeq L^\vee \otimes M^\vee$.
3. Wywnioskuj, że zbiór klas izomorfizmu snopów odwracalnych na X z operacjami $(-)\otimes(-)$, $(-)^\vee$ oraz elementem neutralnym $\mathcal{O}_X$ jest grupą przemienną.

Zadanie 3 CIĘCIA GLOBALNE SNOPÓW ODWRACALNYCH
Niech X będzie całkowitym schematem rzutowym nad ciałem algebraicznie domkniętym $\Bbbk$.

1. Pokaż, że $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Bbbk$. *Wskazówka: przykładowy tok rozumowania: z twierdzenia Serra wynika, że $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ jest skończoną $\Bbbk$-algebrą. Sprawdź, że jest to dziedzina.*
2. Pokaż, że każdy morfizm $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ jest albo zerowy albo jest izomorfizmem.
   Wskazówka: $H^0(X, -) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, -)$.
3. Niech L będzie snopem odwracalnym na X. Załóżmy, że $H^0(X, L) \neq 0$ oraz $H^0(X, L^\vee) \neq 0$. Pokaż, że $L \simeq \mathcal{O}_X$.
   Weź niezerowe cięcia s, t i popatrz na złożenia $t \circ s, s \circ t \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$.

Uwaga ogólna: Jeśli L_1, L_2 mają niezerowe cięcia globalne to $L_1 \otimes L_2$ także. Jeśli więc zdefiniujemy $L \geqslant 0 \iff H^0(L) \neq 0$, to mamy $L_1, L_2 \geqslant 0 \implies L_1 \otimes L_2 \geqslant 0$ oraz $L_1 \geqslant 0 \wedge L_1^\vee \geqslant 0 \implies L_1 \simeq \mathcal{O}_X$. Zatem posiadanie niezerowych cięć globalnych jest warunkiem niejako „dodatniości” na $\operatorname{Pic}(X)$.

Zadanie 4 AUTOMORFIZMY KRZYWYCH
Niech C będzie gładką krzywą rzutową nad ciałem algebraicznie domkniętym $\Bbbk$. *Genusem geometrycznym C* nazywamy liczbę $g(C) := \dim_{\Bbbk} H^0(C, \Omega_{C/\Bbbk})$.
Uwaga/przypomnienie: gładkość znaczy, że $\Omega_{C/\Bbbk}$ jest snopem odwracalnym.

1. Oblicz genus $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$.
   Wskazówka: np. ciąg Eulera.
2. Uzasadnij, że jeśli $g(C) \geqslant 2$, to $H^0(T_{C/\Bbbk}) = 0$.
   Wskazówka: poprzednie zadanie.
3. Pokaż, że jeśli $g(C) \geqslant 2$, to grupa $\operatorname{Aut}(C)$ jest dyskretna i co najwyżej przeliczalna.
   Wskazówka: możesz użyć nieudowodnionego a sformułowanego na wykładzie twierdzenia, że $T_\varphi \operatorname{Hom}(X, Y) = H^0(\varphi^* T_{Y/\Bbbk})$.

Zadanie 5 HIPERPOWIERZCHNIE II, ZADANIE DODATKOWE
Niech S, d będą jak w zadaniu 1.

1. Niech $P = \mathbb{P}(S_d^\vee)$ będzie urzutowieniem przestrzeni S_d. Skonstruuj domknięty podschemat $\mathcal{Z} \subset P \times \mathbb{P}^n$ którego włóknem nad elementem $[F] \in \mathbb{P}(S_d^\vee)$ jest hiperpowierzchnia $(F = 0) \subset \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$.
2. Pokaż, że $\mathcal{Z} \to P$ jest płaskim morfizmem.
3. Niech $\varphi \colon P \to \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})$ będzie odwzorowaniem indukowanym przez $\mathcal{Z}$. Pokaż, że $d\varphi|_x \colon T_x P \to T_{\varphi(x)} \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})$ jest bijekcją dla każdego punktu $x \in P$.

Uwaga: jeszcze trochę pracy potrzeba, by pokazać, że P jest izomorficzne z odpowiednią składową schematu Hilberta. To coś, czego oczekiwalibyśmy: deformacje hiperpowierzchni to deformacje współczynników jej równania.