Teoria deformacji
VII seria zadań (na poniedziałek 6.04, wersja 1.01)

Z poprzedniej listy pozostało zadanie 3.4-5, można je zgłaszać. Zadanie 3.3, które także pozostało, przepisałem jako zadanie 1.

Zadanie 1
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Niech $m_1, \dots, m_d \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ będą parami różnymi jednomianami. Pokaż, że istnieje zbiór $\Bbbk$-punktów $\Gamma = \{p_1, \dots, p_d\} \subset \Bbbk^n$ taki, że wektory $(m_1(p_i), \dots, m_d(p_i))$ dla $i = 1, 2, \dots, d$ są liniowo niezależne. Wywnioskuj, że złożone odwzorowanie

$$\oplus_{i=1}^d \Bbbk m_i \hookrightarrow \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych nad $\Bbbk$. *Wskazówka: wyznacznik macierzy kwadratowej o wierszach będących wektorami powyżej jest niezerowym wielomianem od współrzędnych $\{p_i\}_i$.*

Zadanie 2 Zmiana bazy przestrzeni rzutowych, powtórzenie z GA(?)
Niech $S = \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$. Dla każdego pierścienia A niech $S_A := A \otimes_{\mathbb{Z}} S$ oraz $\mathbb{P}^n_A := \operatorname{Proj}(S_A)$.

1. Uzasadnij, że $\mathbb{P}^n_A$ ma naturalne odwzorowanie w $\operatorname{Spec}(A)$.
2. Uzasadnij, że dla każdego homomorfizmu $A \to B$ mamy naturalny izomorfizm A-schematów
$$\mathbb{P}^n_A \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(B) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}^n_B.$$
W szczególności, $\mathbb{P}^n_A \simeq \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} \operatorname{Spec}(A)$.
3. Uzasadnij, że jeśli A jest $\Bbbk$-algebrą, to $\mathbb{P}^n_A \times_{\operatorname{Spec}(A)} \mathbb{P}^m_A \simeq (\mathbb{P}^n_\Bbbk \times \mathbb{P}^m_\Bbbk) \times \operatorname{Spec}(A)$, gdzie $\times$ to produkt nad $\operatorname{Spec}(\Bbbk)$.

Zadanie 3
Niech $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$ oraz $\mathbb{P}^m_A = \operatorname{Proj}(A[y_0, \dots, y_m])$ dla pierścienia A. Niech $R = \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ i wprowadźmy na nim $\mathbb{N}^2$-gradację przez $\deg(x_i) = (1, 0)$, $\deg(y_j) = (0, 1)$ dla wszystkich i, j.

1. Niech $R_A := A \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Pierścień ten też jest $\mathbb{Z}^2$-zgradowany; przyjmujemy $\deg(A) = \{0\}$. Pokaż, że dla ustalonych i oraz j podschemat $(x_i y_j \neq 0) \subset \mathbb{P}^n_A \times_A \mathbb{P}^m_A$ jest afiniczny, a jego pierścień funkcji globalnych to $(R_{x_i y_j})_{(0,0)}$, gdzie $(0, 0)$ oznacza wzięcie gradacji, zaś $x_i y_j$ oznacza lokalizację.
2. Niech $I \subset R_A$ będzie ideałem jednorodnym względem $\mathbb{Z}^2$-gradacji (czyli $(x_0^2 y_1 - x_1^2 y_0)$ jest jednorodny, ale $(x_0 - y_0)$ nie). Pokaż, że istnieje jedyny schemat domknięty w $\mathbb{P}^n_A \times_A \mathbb{P}^m_A$, który na każdym afinicznym zbiorze otwartym postaci $(x_i y_j \neq 0)$ jest zadany ideałem $(I_{x_i y_j})_{(0,0)}$. Oznaczamy go $V(I)$.
3. Pokaż, że jeśli $\varphi \colon A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni to przeciwobrazem schematu $V(I)$ w $\mathbb{P}^n_B \times_B \mathbb{P}^m_B$ jest $V(R_B \cdot R_\varphi(I))$, gdzie $R_\varphi \colon R_A \to R_B$ jest homomorfizmem indukowanym przez $\varphi \otimes \mathrm{id}_R$. *Wskazówka: wystarczy sprawdzić na $(x_i y_j \neq 0)$.*

Zadanie 4 schemat Hom z reguły nie jest rzutowy. Podpunkty 3-5 są dodatkowe
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem, $A = \Bbbk[t]$. Rozważmy $\mathbb{N}^2$-zgradowany pierścień $R = A[x_0, x_1, y_0, y_1]$ jak w poprzednim zadaniu. Rozważmy jednorodny ideał $I = (x_0 y_1 - t x_1 y_0)$ i schemat $\mathcal{Z} := V(I) \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1} \times_{\mathbb{A}^1_\Bbbk} \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_\Bbbk} \simeq \mathbb{P}^1_\Bbbk \times_\Bbbk \mathbb{P}^1_\Bbbk \times_\Bbbk \mathbb{A}^1_\Bbbk$, który traktujemy jak schemat nad $\mathbb{A}^1_\Bbbk$ poprzez pr_3.

1. Uzasadnij, że dla $t \in (\Bbbk \setminus \{0\})$ morfizm $pr_1 \colon \mathcal{Z}|_t \to \mathbb{P}^1_\Bbbk$ jest izomorfizmem.
Uwaga: tu $\mathcal{Z}|_t$ jest włóknem nad $\Bbbk$-punktem $t \in \mathbb{A}^1_\Bbbk$. Wskazówka: poprzednie zadanie i bezpośrednie przeliczenie.
2. Uzasadnij, że morfizm $pr_1 \colon \mathcal{Z}|_0 \to \mathbb{P}^1_\Bbbk$ nie jest izomorfizmem. *Wskazówka: jak wygląda to odwzorowanie na przestrzeniach topologicznych?*
3. Uzasadnij, że wielomian Hilberta wszystkich włókien $\mathcal{Z}$ jest taki sam i wywnioskuj, że $\mathcal{Z} \to \mathbb{A}^1_\Bbbk$ jest płaskie i rzutowe.
4. Niech $\varphi \colon \mathbb{A}^1_\Bbbk \to \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}^1_\Bbbk \times \mathbb{P}^1_\Bbbk)$ będzie odwzorowaniem odpowiadającym $\mathcal{Z}$. Wykaż, że $\varphi^{-1}(\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^1_\Bbbk, \mathbb{P}^1_\Bbbk))$ jest niepustym schematem otwartym w $\mathbb{A}^1_\Bbbk$, który nie jest całością.
5. Wywnioskuj, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^1_\Bbbk, \mathbb{P}^1_\Bbbk)$ nie jest schematem właściwym nad $\Bbbk$.