Teoria deformacji
VI seria zadań (na poniedziałek 30.03, wersja 1.33)

Z poprzednich list pozostały tylko dwa podpunkty zadania V.3.4-5. Można je zgłaszać. Pisałem w niedoczasie więc jest zwiększona szansa na błędy. Zgłaszajcie i z góry przepraszam!

Zadanie 1 Obliczanie wielomianów Hilberta
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem i niech $Z \subset \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ będzie domkniętym podschematem. Załóżmy, że Z jest wymiaru zero.

1. Pokaż, że przestrzeń topologiczna $|Z|$ składa się ze skończenie wielu punktów. Pokaż, że każda spójna składowa Z jest jako przestrzeń topologiczna punktem.
2. Niech $Z' \subset Z$ będzie spójną składową. Pokaż, że istnieje hiperpłaszczyzna w $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ nieprzecinająca Z' i wywnioskuj, że Z' jest afinicznym schematem. Wywnioskuj, że Z jest afinicznym schematem.
3. Niech $Z = \operatorname{Spec}(A)$. Uzasadnij, że A jest algebrą Artinowską. Pokaż, że każdy snop lokalnie wolny rangi d na Z jest wolny. *Wskazówka: produkt lokalizacji* $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Spec}(A)} A_{\mathfrak{m}}$ *jest izomorfizmem.*
4. Pokaż, że funkcja $n \mapsto \dim_{\Bbbk} H^0(Z, \mathcal{O}_Z(n))$ jest stała i równa $\dim_{\Bbbk} A$. Liczbę $\dim_{\Bbbk} A$ nazywamy *stopniem* schematu Z. Zauważmy, że stopień jest równy wielomianowi Hilberta Z i że stopień zależy od wyboru ciała bazowego $\Bbbk$.

Zadanie 2 Lokalna wolność ważnym założeniem
Podaj przykład schematu $X = \operatorname{Spec}(A)$ i takiego morfizmu snopów quasikoherentnych $\varphi\colon M^{\sim} \to N^{\sim}$ na nim, że funktor

$$\mathcal{Z}(T) = \{j\colon T \to X \ \mid j^*\varphi = 0\}$$

jest reprezentowany przez otwarte włożenie, które nie jest domkniętym włożeniem. *Wskazówka: jeśli* $T = \operatorname{Spec}(B)$ *jest afiniczny, to* $j^*\varphi$ *pochodzi od homomorfizmu* B*-modułów* $\mathrm{id}\otimes\varphi\colon B\otimes_A M \to B \otimes_A N$.

Zadanie 3 Reprezentowalność schematu Hilberta punktów klasyczniej
Ustalmy liczbę $d \in \mathbb{Z}$, traktowaną jako stały wielomian Hilberta. Niech

$$\operatorname{Hilb}^d(\mathbb{A}^n)(T) = \left\{ \begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, phantom, "\subset_{cl}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{A}^n \times T \arrow[d, "pr_2"] \\ & T \end{tikzcd} \ \middle|\ \begin{array}{ll} \pi \text{ wiernie płaskie i skończone}, & \forall_{t\in T} \dim_{\kappa(t)} H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}|_t}) = d \\ \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \text{ skończenie prezentowany} & \text{snop na } T \end{array} \right\}.$$

Niech dla zwięzłości $\mathcal{H} := \operatorname{Hilb}^d(\mathbb{A}^n)$. Niech $S := \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n] = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ i jak zwykle $S_{(-)} := S\otimes_{\mathbb{Z}} (-)$ oraz $\mathbb{A}^n_{(-)} = \mathbb{A}^n \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} (-)$.

1. Uzasadnij, że dla każdego $T = \operatorname{Spec}(A)$ oraz $[\mathcal{Z}] \in \mathcal{H}(T)$ moduł $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ nad A jest lokalnie wolny rangi d. Pokaż, że odwrotnie, lokalnie wolny A-moduł rangi d który jest A-algebrą postaci S_A/I daje element $\mathcal{H}(T)$.
Wskazówka: π jest z definicji afiniczne.
2. Niech $\lambda \subset S$ będzie podgrupą abelową rangi d ze względu na dodawanie. Zdefiniujmy obcięty podsnop Zariskiego $\mathcal{H}^\lambda\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ zadany przez
$$\mathcal{H}^\lambda(A) = \left\{\operatorname{Spec}(B) \subset_{cl} \mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec}(A)} \middle|\ \text{indukowane odwzorowanie } \lambda\otimes_{\mathbb{Z}} A \to B \text{ jest izomorfizmem}\right\}.$$
Udowodnij, że $\mathcal{H}^\lambda \to \mathcal{H}$ jest dobrze określone i jest otwartym włożeniem. Niech Λ będzie zbiorem wszystkich podgrup abelowych w S rozpiętych przez d jednomianów. Pokaż, że $\{\mathcal{H}^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest pokryciem otwartym $\mathcal{H}$.
3. Dla których $\lambda \in \Lambda$ i ciał $\Bbbk$ zbiór $\mathcal{H}^\lambda(\Bbbk)$ jest niepusty?
4. Niech $\lambda \in \Lambda$. Wykaż, że jeśli podschemat $\operatorname{Spec}(B) \subset \mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec}(A)}$ odpowiada elementowi $\mathcal{H}^\lambda(A)$, to jego ideał jest generowany przez jednoznacznie wyznaczone elementy postaci $\{\mu - \sum_{i=1}^d a_i m_i\}_\mu$, gdzie $\{m_i\}_{i=1}^d$ jest bazą jednomianową λ, zaś μ przebiega jednomiany spoza λ.
5. Uzasadnij, że dla każdego $\lambda \in \Lambda$ funktor $\mathcal{H}^\lambda$ jest reprezentowany przez schemat afiniczny, który jest domkniętym podschematem przestrzeni afinicznej; włożenie jest zadane przez $[a_i]$.

Nieco niepokoju może wywoływać fakt, że funktor Hilberta jest zdefiniowany inaczej niż na wykładzie. Jeszcze tego nie pokazaliśmy, ale obie definicje pokrywają się.