Teoria deformacji
V seria zadań (na poniedziałek 23.03.20, wersja 1.11)

Z poprzednich list pozostały zadania II.3 oraz III.3.1-5. Można je zgłaszać. Ta seria też jest obcięta w nadziei, że omówimy wreszcie poprzednie zadania :)

Zadanie 1
Niech A będzie pierścieniem i M będzie skończenie prezentowanym płaskim A-modułem. Pokaż, że M jest lokalnie wolny. Możesz użyć przykładowych kroków:

1. Z zadania III.1.5 wynika, że wystarczy pokazać, że $M_{\mathfrak{p}}$ jest wolny dla każdego puntu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, możemy zredukować się do przypadku lokalnego $A = A_{\mathfrak{p}}$.
2. Wybieramy minimalny zbiór generatorów $F = A_{\mathfrak{p}}^{\oplus d} \to M$. Pokazujemy, że $F \to M$ jest izomorfizmem. *Wskazówka:* $(-) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p})$.

Zadanie 2 W założeniu powtórzenie z geometrii algebraicznej, zatem może być trudne, jeśli odpowiednich tematów nie było. Hartshorne rozdział 1 Twoim przyjacielem
Jak zwykle $\Bbbk$ jest ciałem. Niech $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2(\Bbbk)$ będą trzema różnymi $\Bbbk$-punktami i niech

$$\Gamma = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$$

będzie odpowiadającym im podschematem zredukowanym (lub, jak kto woli, podrozmaitością). Niech $I_\Gamma \subset S := \Bbbk[x_0, \ldots, x_2]$ będzie ideałem funkcji znikających na Γ, czyli $I_\Gamma = H^0_*(\mathcal{I}_\Gamma)$, gdzie $\mathcal{I}_\Gamma$ jest snopem ideałów.

1. Pokaż, że wielomian Hilberta Γ to wielomian stały 3.
2. Znajdź wszystkie możliwe wartości $\dim_{\Bbbk}(S/I_\Gamma)_1$.
3. Zbuduj podschemat $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}^n_{\Bbbk} \times_{\Bbbk} \mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ płaski nad $\mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ i taki, że dla każdego $\alpha \in \Bbbk$ włókno nad $\Bbbk$-punktem $\alpha \in \mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ jest schematem Γ_α jak wyżej jak pewnych punktów, ale funkcja $\alpha \mapsto \dim_{\Bbbk}(S/I_{\Gamma_\alpha})_1$ nie jest stała. *Wskazówka: przesuń punkty do specjalnej konfiguracji. By pokazać płaskość, skorzystaj z twierdzenia z wykładu.*

   Zatem w kryterium płaskości obcięcie do dostatecznie dużych gradacji jest konieczne.

Zadanie 3 Nietrywialny punkt
Niech $S = \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]$. Niech $p := 1 \in \mathbb{Q}[t]$ będzie wielomianem stałym. Oznaczmy dla zwięzłości $\mathbb{P} := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj}(S)$. To zadanie ma na celu pokazać, że $\operatorname{Hilb}^p(\mathbb{P})$ jest izomorficzny z $\mathbb{P}$.

1. **Zanim przejdziesz dalej**, zastanów się dlaczego to miałaby być prawda.
   Ten podpunkt też jest punktowany $\ddot\smile$ *— zrób go.*
2. Oblicz $\operatorname{Hilb}^p(\mathbb{P})(\operatorname{Spec}(\Bbbk))$ dla ciała $\Bbbk$.
3. Niech $\Delta(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ będzie obrazem diagonali. Pokaż, że $pr_1|_{\Delta(\mathbb{P})} \colon \Delta(\mathbb{P}) \to \mathbb{P}$ jest płaską rodziną o wielomianie Hilberta włókien równym 1.
4. Niech $T = \operatorname{Spec}(A)$ i niech $S_A = S \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Niech $\mathcal{Z} \subset T \times \mathbb{P}$ będzie płaskim schematem nad T o wielomianie Hilberta włókien równym 1. Niech $S_{\mathcal{Z}}$ będzie skończenie generowanym zgradowanym S_A-modułem takim, że $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} = (S_{\mathcal{Z}})^{\sim}$. Niech m będzie gradacją taką, że $S_{\mathcal{Z}}$ jest generowany w stopniach $\leqslant m$ oraz dla wszystkich $m' \geqslant m$ moduł $(S_{\mathcal{Z}})_{m'}$ jest lokalnie wolny rangi 1. Pokaż, że istnieją takie elementy $f_1, \ldots, f_r \in A$ że $((S_{\mathcal{Z}})_{f_i})_{\geqslant m} \simeq (A_{f_i}[u])_{\geqslant m}$ jako zgradowane A_{f_i}-algebry (gdzie $\deg(u) = 1$) oraz $(f_1, \ldots, f_r) = (1)$. *Wskazówka: rozważ f_i dla których $((S_{\mathcal{Z}})_{f_i})_{m'}$ jest wolny.*

   Pokaż, że $\mathcal{Z} \to T$ jest izomorfizmem. *Wskazówka:* $\mathcal{Z} \simeq \operatorname{Proj} S_{\mathcal{Z}} \simeq \operatorname{Proj}((S_{\mathcal{Z}})_{\geqslant m})$.
5. Niech $\mathcal{Z} \subset T \times \mathbb{P}$ będzie płaskim schematem nad T o wielomianie Hilberta włókien 1 (nie zakładamy, że T afiniczny). Wywnioskuj, że $\mathcal{Z} \to T$ jest izomorfizmem. Wywnioskuj, że $\mathcal{Z}$ pochodzi od cofnięcia $\Delta(\mathbb{P})$ przez jedyne odwzorowanie $T \to \mathbb{P}$. Wywnioskuj, że $\mathbb{P}$ reprezentuje $\operatorname{Hilb}^p(\mathbb{P})$. *Wskazówka do końcówki: zadanie II.2.*