Teoria deformacji
IV seria zadań (na poniedziałek 16.03.20, wersja 1.0)

Z poprzedniej listy pozostały zadania 1.5-6, 2.5 oraz 3. Można je zgłaszać — bardzo zachęcam! — i z tego powodu lista z dziś jest odchudzona. Na stronie jest spisane przykładowe rozwiązanie podpunktów 1.3-4.

Zadanie 1

1. Pokaż, że jeśli A jest dziedziną ideałów głównych, to każdy A-moduł beztorsyjny jest płaski.
2. Pokaż, że jeśli A jest DVRem z parametrem lokalnym t oraz M jest A-modułem takim, że mnożenie przez t jest injektywne na M, to M jest płaski.
3. Niech $A = \Bbbk[x, y]$. Pokaż, że ideał (x, y) jest A-modułem beztorsyjnym ale nie płaskim.

Zadanie 2
Niech $A = \Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^n$ oraz B będzie lokalną noetherowską A-algebrą. Niech M będzie skończenie generowanym B-modułem. Pokaż, że następujące warunki są równoważne

1. M jest płaskim A-modułem.
2. $\ker(\mu_\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}M$, gdzie $\mu_\varepsilon \colon M \to M$ jest mnożeniem przez ε.

Dla każdego n podaj przykład M który nie jest płaski nad A ale $M/\varepsilon^{n-1}M$ jest płaski nad A/ε^{n-1}.

Niech M będzie A-modułem. Mówimy, że M jest *wiernie płaski* jeśli M jest płaski i dodatkowo dla każdego niezerowego A-modułu N zachodzi $M \otimes_A N \neq 0$.

Zadanie 3

1. Załóżmy, że $(A, \mathfrak{m})$ jest pierścieniem lokalnym, zaś M jest płaskim A-modułem. Pokaż, że M jest wiernie płaski wtedy i tylko wtedy, gdy $M \neq \mathfrak{m}M$. *Wskazówka: połóż definicję na kowadle* $(-) \otimes_A \Bbbk$ *i uderz w nią Nakayamą.*
2. Podaj przykład płaskiego ale nie wiernie płaskiego modułu.
3. Pokaż, że płaska A-algebra B jest wiernie płaska wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ jest surjektywne.
4. Pokaż, że jeśli $A \to B$ jest płaskim i lokalnym homomorfizmem niezerowych pierścieni lokalnych, to jest on wiernie płaski.
5. Pokaż, że jeśli B jest płaską A-algebrą, to $f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ jest zamknięte ze względu na generalizację, tzn. jeśli punkt $p_1 \in \operatorname{im} f$ leży w domknięciu $p_2 \in \mathrm{Spec}(A)$ to również p_2 należy do $\operatorname{im} f$. *Wskazówka: poprzednie podpunkty.*
6. [Zadanie dodatkowe] Pokaż, że jeśli $A \to B$ jest płaską skończenie prezentowaną A-algebrą, to $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ jest przekształceniem otwartym.
   Wskazówka: możesz przyjąć za znane twierdzenie Chevalleya o obrazie. A-algebra jest skończenie prezentowana, jeśli jest postaci $A[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$. *Dla A noetherowskiego „skończenie prezentowana = skończenie generowana”*